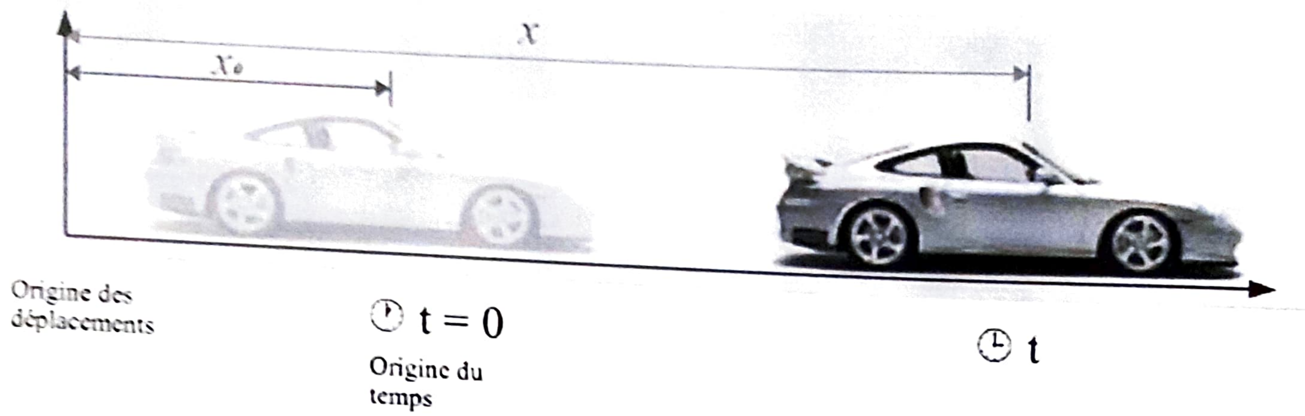
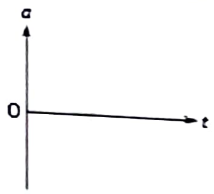
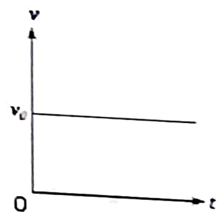
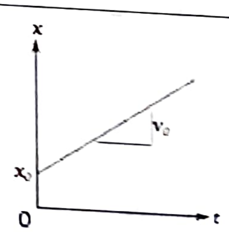
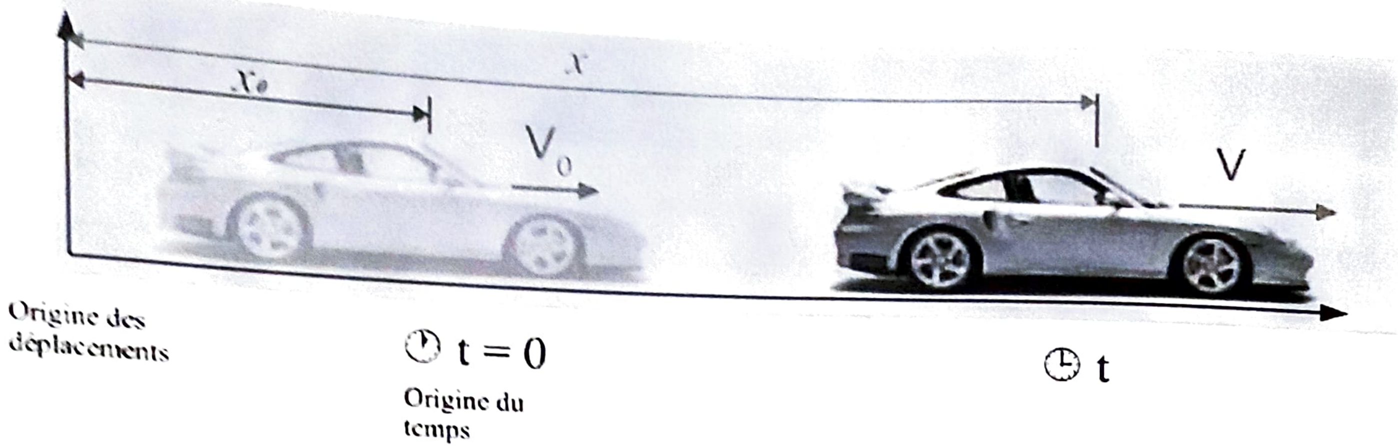
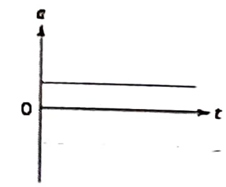
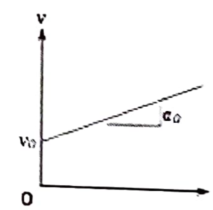
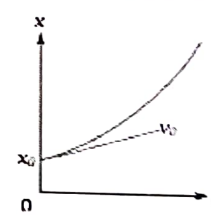
A. Mouvement rectiligne uniforme



Accélération (m/s^2)	$a = \dot{v} = \ddot{x} = 0$	
Vitesse (m/s)	$v = \dot{x} = v_0 = cst$	
Déplacement (m)	$x = v.t + x_0$	

B. Mouvement rectiligne uniformément varié (accélération ou décélération)



Accélération (m/s^2)	$a = \dot{v} = \ddot{x} = cst$	 accélération (en haut) / décélération (en bas)
Vitesse (m/s)	$v = \dot{x} = a.t + v_0$	
Déplacement (m)	$x = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$	

C. Mouvement de rotation uniforme et uniformément variés

Cela fonctionne de la même manière que pour les mouvements rectilignes mais les termes changent.

	Mouvement uniforme	Mouvement uniformément varié
Accélération (rad/s^2)	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = cst$
Vitesse (rad/s)	$\omega = \dot{\theta} = \omega_0 = cst$	$\omega = \dot{\theta} = \alpha.t + \omega_0$
Déplacement (rad)	$\theta = \omega.t + \theta_0$	$\theta = \frac{1}{2}.\alpha.t^2 + \omega_0.t + \theta_0$

VITESSES D'UN POINT D'UN SOLIDE

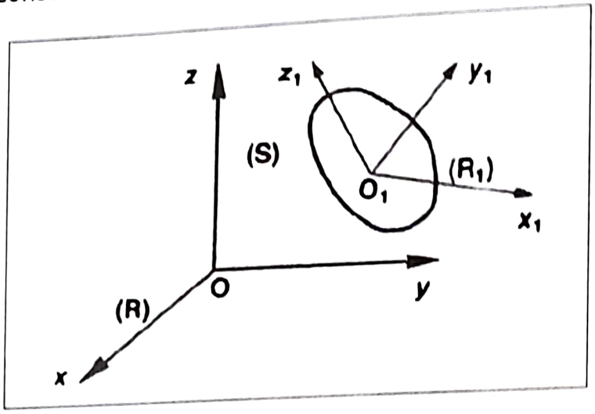
A. Notion de référentiel

Afin d'étudier le mouvement d'un point ou d'un système de solides, il est nécessaire de mettre en place un système de référence appelé « référentiel ». Il représente en quelque sorte la position d'observation des phénomènes. Il est composé d'une description de l'espace (repère) et d'une description du temps.

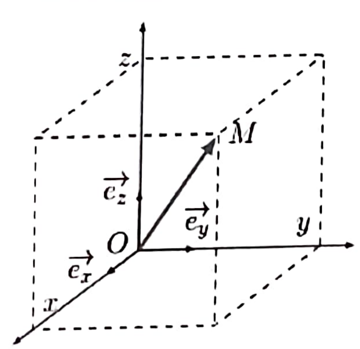
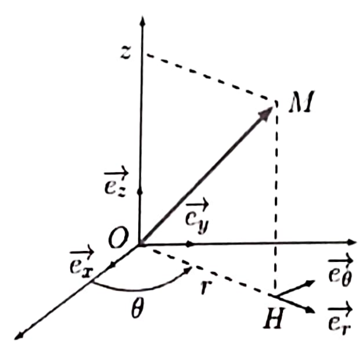
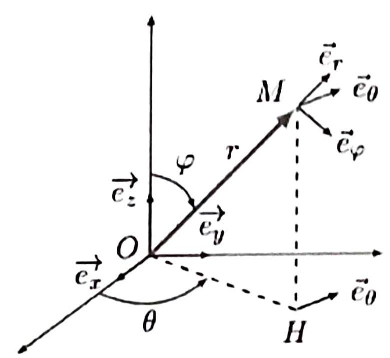
B. Notion de repère et paramétrages courants

Un repère est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs formant une base. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de l'origine.

Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère « galiléen » $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, il faut commencer par lier à ce solide une repère « mobile » $R_1(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ et ensuite définir la position du repère R_1 par rapport au repère R.



Voilà un exemple de paramétrage pour les cordonnées d'un point M :

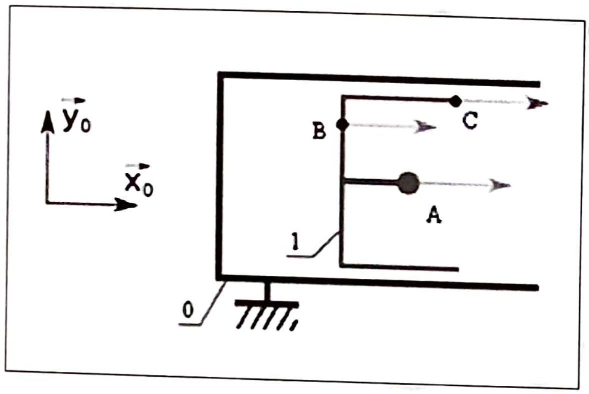
		
Coordonnées cartésiennes $M(x,y,z)$ $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z}$	Coordonnées cylindriques $M(r,\theta,z)$ $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r} + z.\overrightarrow{e_z}$	Coordonnées sphériques $M(r,\varphi,\theta)$ $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r}$
	Ne seront pas utilisées sur ce semestre	

Nous utiliserons très souvent l'alphabet grec en cinématique. Voici le nom et la symbolisation en minuscule et en majuscule de chacune des lettres de l'alphabet.

Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	Α	alpha	ν	Ν	nu
β	Β	béta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	ο	Ο	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	Ε	epsilon	ρ	Ρ	rhô
ζ	Ζ	dzéta	σ	Σ	sigma
η	Η	éta	τ	Τ	tau
θ	Θ	théta	υ	Υ	upsilon
ι	Ι	iota	φ	ϑ	phi
κ	Κ	kappa	χ	Χ	khi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	Μ	mu	ω	Ω	oméga

C. Mouvement de Translation rectiligne

Pour notre exemple, on se place dans le cas d'un mouvement de translation du piston 1 par rapport au corps 0.



Base Galiléenne : $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$

Vitesse de translation de A : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v.\vec{x_0}$

✓ Ecriture du torseur cinématique :

$$\{V_{1/0}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \,;\, \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\right\}_{B_0} = {}_A\left\{\vec{0} \,;\, v.\vec{x_0}\right\}_{B_0} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

✓ Formule du transport pour trouver $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = v.\vec{x_0} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = v.\vec{x_0} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$$

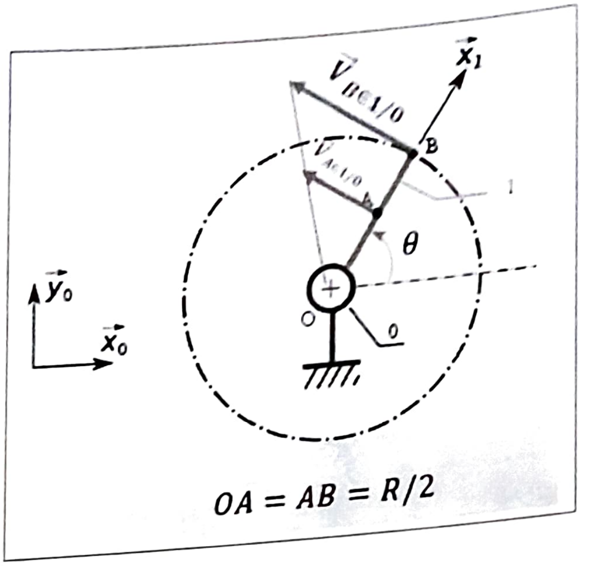
$$\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = v.\vec{x_0} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{0} = v.\vec{x_0} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$$

D. Mouvement de rotation autour d'un point fixe

Pour notre exemple, on se place dans le cas d'un mouvement de rotation d'une barre 1 par rapport au bâti 0.

Base Galiléenne : $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
Base mobile : $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$
Avec $\vec{z_0} = \vec{z_1}$

Vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}.\vec{z_0} = \omega.\vec{z_0}$



✓ Calcul des vitesses $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ par dérivation :

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} = \left[\frac{d\,\frac{R}{2}.\vec{x_1}}{dt}\right]_{B_1} + \dot{\theta}.\vec{z_1} \wedge \frac{R}{2}.\vec{x_1} = 0 + \frac{R}{2}.\dot{\theta}.\vec{y_1} = \frac{R}{2}.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OB} = \left[\frac{d\,R.\vec{x_1}}{dt}\right]_{B_1} + \dot{\theta}.\vec{z_1} \wedge R.\vec{x_1} = 0 + R.\dot{\theta}.\vec{y_1} = R.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

$$\overrightarrow{V_{O\in 1/0}} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OO} = \left[\frac{d\,0.\vec{x_1}}{dt}\right]_{B_1} + \dot{\theta}.\vec{z_1} \wedge 0.\vec{x_1} = \vec{0}$$

✓ Ecriture du torseur cinématique :

$$\{V_{1/0}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{2}.\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{B_1} = {}_{B}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R.\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{B_1} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_{B_1}$$

rd/s m/s

✓ Formule du transport pour trouver $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - \frac{R}{2}.\vec{x_1} \wedge \dot{\theta}.\vec{z_1} = \frac{R}{2}.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

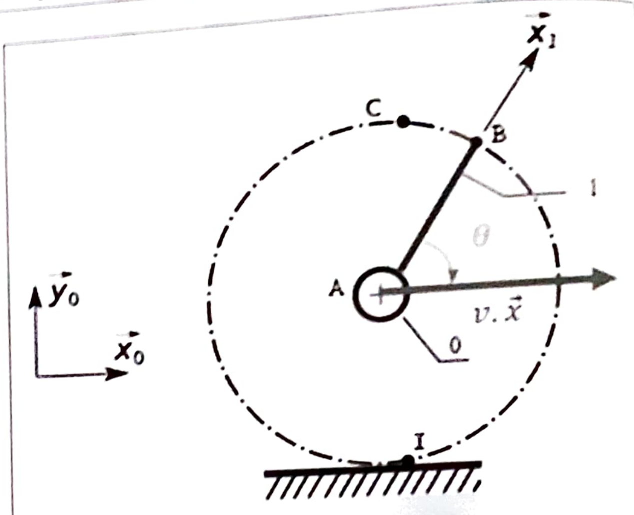
$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - R.\vec{x_1} \wedge \dot{\theta}.\vec{z_1} = R.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

ou

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{R}{2}.\dot{\theta}.\vec{y_1} - \frac{R}{2}.\vec{x_1} \wedge \dot{\theta}.\vec{z_1} = R.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

E. Mouvement de translation rectiligne + rotation propre

Pour notre exemple, on se place dans le cas du mouvement d'une roue de vélo 1 en liaison pivot avec le cadre 0. Il y a roulement sans glissement en I.



Sans glissement !!

Base Galiléenne : $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
Base liée au cadre du vélo $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ – Translation !
Base mobile liée à la roue : $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$
Avec $\vec{z_0} = \vec{z_1}$

Vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\dot{\theta}.\vec{z_0}$ – sens de rotation !

Vitesse du centre de la roue : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v.\vec{x_0}$

✓ Formule du transport pour trouver $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = v.\vec{x_0} - R.\vec{x_1} \wedge -\dot{\theta}.\vec{z_1} = v.\vec{x_0} - R.\dot{\theta}.\vec{y_1}$$

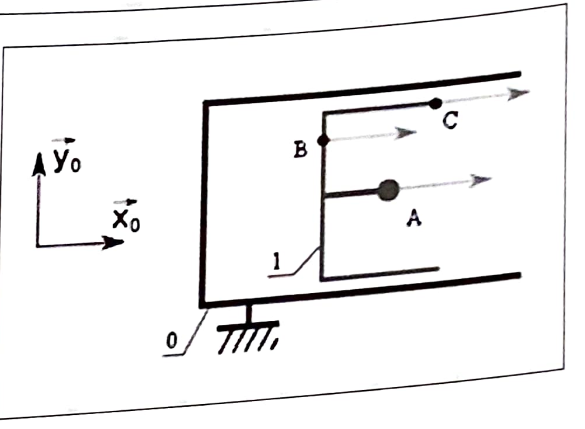
$$\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = v.\vec{x_0} - R.\vec{y_0} \wedge -\dot{\theta}.\vec{z_1} = v.\vec{x_0} + R.\dot{\theta}.\vec{x_0} = (v + R.\dot{\theta}).\vec{x_0}$$

$$\overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{\frac{1}{0}}} = v.\vec{x_0} + R.\vec{y_0} \wedge -\dot{\theta}.\vec{z_0} = v.\vec{x_0} - R.\dot{\theta}.\vec{x_0} = (v - R.\dot{\theta}).\vec{x_0} = \vec{0}$$

Condition de roulement sans glissement en I : $v = R.\dot{\theta}$

A. Mouvement de Translation rectiligne

Pour notre exemple, on se place dans le cas d'un mouvement de translation du piston 1 par rapport au corps 0.



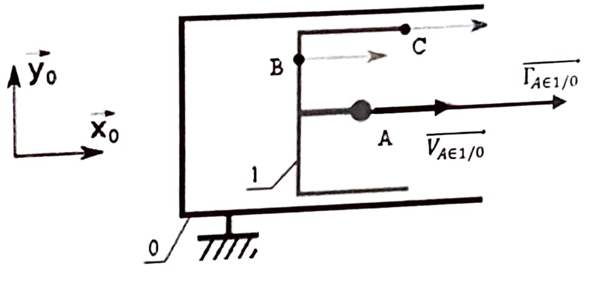
Base Galiléenne : $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$

Vitesse de translation de A : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v.\vec{x_0}$

✓ Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}}$ par dérivation :

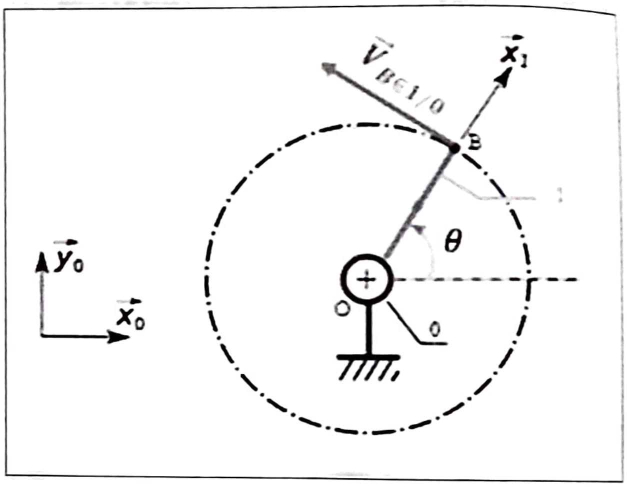
$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\,.v.\vec{x_0}}{dt}\right]_{B_0} = \dot{v}.\vec{x_0}$$



La vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ et l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}}$ sont colinéaires. Elles sont dans le même sens si le mouvement est accéléré ou de sens opposé si le mouvement est décéléré.

B. Mouvement de rotation autour d'un point fixe

Pour notre exemple, on se place dans le cas d'un mouvement de rotation d'une barre 1 par rapport au bâti 0.



Base Galiléenne : $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
Base mobile : $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$
Avec $\vec{z_0} = \vec{z_1}$

Vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}.\vec{z_0} = \omega.\vec{z_0}$

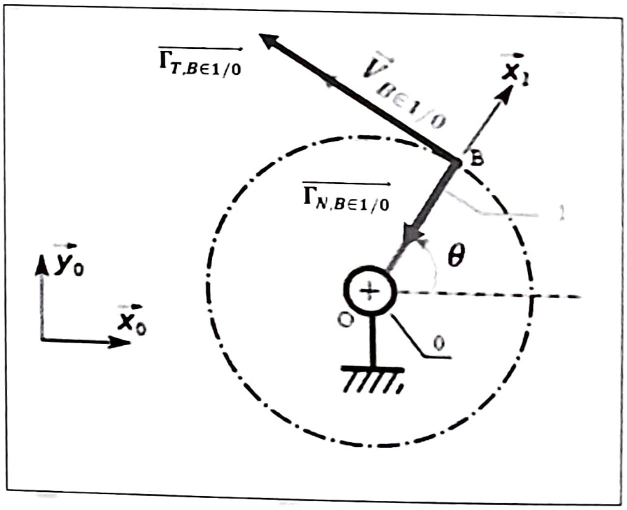
Vitesse de B : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = R.\dot{\theta}.\vec{y_1}$

✓ Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}}$ par dérivation :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \left[\frac{d\,R.\dot{\theta}.\vec{y_1}}{dt}\right]_{B_1} + \dot{\theta}.\vec{z_1} \wedge R.\dot{\theta}.\vec{y_1} = \boldsymbol{R.\ddot{\theta}.\vec{y_1} - R.\dot{\theta}^2.\vec{x_1}}$$

<u>On obtient :</u>

L'accélération **TANGENTIELLE** : $\overrightarrow{\Gamma_{T,B\in 1/0}} = R.\ddot{\theta}.\vec{y_1}$



Elle est dans le sens du mouvement et colinéaire à la vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$.

L'accélération **NORMALE** : $\overrightarrow{\Gamma_{N,B\in 1/0}} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{x_1}$

Elle existe dès lors qu'un solide est en mouvement de rotation. Elle est aussi appelée « accélération centripète ». C'est elle qui est à l'origine de la « force centrifuge ».