Calcul matriciel

Table des matières

1 Définitions

1.1 Matrice

Une matrice n x p est un tableau à n lignes et p colonnes (ou d'ordre n x p) à coefficients dans $\Re$ (ou C). Les nombres qui la composent sont les coefficients de la matrice et sont notés a_{ij} où i est l'indice de la ligne et j celui de la colonne. Le coefficient a_{ij} se situe donc à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne.
Cette matrice est notée $A = (a_{ij})_{1<i<n, 1<j<p}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ *est une matrice 4 lignes et 3 colonnes.*

$a_{21} = 3$ est positionné à l'intersection de la 2ème ligne et de la 1ère colonne.
Elle contient $3 * 4 = 12$ coefficients.

1.2 Matrices particulières

- **Matrice nulle**
  Une matrice ne contenant que des 0 est appelée matrice nulle, notée A=(0).

- Une matrice est dite **carrée** si elle contient le même nombre de lignes que de colonnes (matrice n x n).

- Une matrice n x 1 est appelée vecteur colonne.

- Une matrice 1 x p est appelée vecteur ligne.

- **Matrice identité**
  On note I_n, la matrice carrée telle que pour toute matrice A, $A * I_n = I_n * A = A$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice diagonale**
  Une matrice carrée est dite diagonale si tous les éléments hors de sa diagonale sont nuls, c'est à dire $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$D_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrice triangulaire**
  Une matrice est dite triangulaire inférieure (supérieure) si tous les termes situés au-dessus (en dessous) de la diagonale sont nuls.

Exemples :

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est la matrice identité dans* $\Re^3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale.*

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure.*

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice (ou vecteur) colonne.*

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *est une matrice (ou vecteur) ligne.*

1.3 Egalité de matrices

On dit que deux matrices sont égales si elles ont même nombre de lignes et de colonnes et si les termes situés aux même places sont égaux.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$

$$A = B \Longleftrightarrow \forall (i,j), a_{ij} = b_{ij}$$

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & 1 & b \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & c \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & d & -3 \end{pmatrix}$

$A = B \Leftrightarrow a = 4, b = -2, c = 2, d = 2$

1.4 Transposée d'une matrice

Pour transposer une matrice, on inverse les lignes et les colonnes.

Soit $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ une matrice,

$$B = t_A \Longleftrightarrow \forall (i,j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} b_{ij} = a_{ji}$$

Remarques :

- Si A est une matrice carrée telle que $t_A = A$ alors A est symétrique
- Si A est une matrice carrée telle que $t_A = -A$ alors A est antisymétrique
- $t_{A+B} = t_A + t_B$
- $t_{\lambda A} = \lambda t_A$
- $t_{BA} = t_A t_B$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; alors \; {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5 Trace d'une matrice

La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale.

Soit $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i, j \leq n$ une matrice,

$$tr(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$$

Propriétés :

- $tr(t_A) = tr(A)$
- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 1 + (-1) + 4 = 4$ *est la trace de la matrice.*

2 Opérations élémentaires

2.1 Somme de matrices

On ne peut faire que la somme de **matrices de même dimension**, à savoir, même nombre de lignes et même nombre de colonnes.

Pour sommer 2 matrices, on somme les termes situés au même endroit dans chacune des matrices.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

Propriétés :

Soient A, B et C, trois matrices de même ordre :

- Commutativité A+B=B+A
- Associativité A+(B+C)=(A+B)+C
- Elément neutre A+(0)=(0)+A=A

Exemple :

Soient 2 matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 & 2+1 \\ 3+3 & 1+1 & 4-2 \\ 0-1 & 2+1 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication d'une matrice par un réel

Pour multiplier une matrice A par un réel λ, on multiplie chaque terme de la matrice par le réel λ. On obtient une matrice λA de même dimension.

Soit $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$
Soit $\lambda \in \Re$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 9 & 3 & 12 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \textit{ (Matrice opposée)}$$

2.3 Produit de matrices

Pour pouvoir multiplier deux matrices, il faut que le nombre de lignes de l'une soit égal au nombre de colonnes de l'autre.

Propriétés :

- Le produit de deux matrices **n'est pas commutatif** **AB≠BA** (en général)
- Associativité Ax(BxC)=(AxB)xC
- Distributivité par rapport à l'addition Ax(B+C)=AxB+AxC
- Element neutre AxI=IxA=A

Méthode de calcul :

Soient $A = (a_{ik})_{1\leq i\leq m, 1\leq k\leq n}$ matrice mxn et $B = (b_{kj})_{1\leq k\leq n, 1\leq j\leq p}$ matrice nxp

$$AxB = (\sum_{1\leq k\leq n} a_{ik}b_{kj})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} ax+br+ct & ay+bs+cu \\ dx+er+ft & dy+es+fu \end{pmatrix}$$

☛ *Exemple 1 :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\4\end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{4} & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ Car } 2*1+1*2=4$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \begin{matrix}2\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & \boxed{7} \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ Car } -1*1+4*2=7$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\4\end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ \boxed{6} & -3 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ Car } 2*3+1*0=6$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \begin{matrix}2\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & \boxed{-3} \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ Car } -1*3+4*0=-3$$

☛ <u>*Exemple 2 :*</u>

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}4\\2\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\-1\\3\end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 2} \\ 3 \quad 1 \quad 4 \\ 0 \quad 2 \quad -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & 7 \\ 10 & 11 \\ 7 & -11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2.4 Coordonnées de l'image d'un vecteur

Une matrice permet de représenter une application linéaire d'un espace vers un autre. Soit f l'application linéaire de $\Re^3$ dans $\Re^2$ dont la matrice est :

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \Re$,

L'image de $\vec{u}$, $f(\vec{u})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ y_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \end{cases}$

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Y = MX$$

Pour obtenir l'image d'un vecteur X par une application f, il suffit de multiplier la matrice M(f) par le vecteur X.

3 Inverse d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice A^{-1}, si elle existe, est la matrice inverse de A telle que $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_n$. On dit alors que A est inversible.

<u>Remarques</u> :

- Si A est inversible, alors A^{-1} est unique
- Le produit de 2 matrices inversibles est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- En pratique, on cherche A^{-1} telle que $A * A^{-1} = I_n$

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Calcul du déterminant

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. On va associer à A un nombre noté $det(A)$; le **déterminant** de la matrice A.

Le déterminant d'une matrice se calcule en développant par rapport à une ligne (i) ou une colonne (j) à l'aide de l'une des formules suivantes :

co facteur

$$detA = \sum_{1\leq i\leq n} a_{i,j} Cof_{i,j} \quad \text{ou} \quad detA = \sum_{1\leq j\leq n} a_{i,j} Cof_{i,j}$$

$$\text{avec} \quad Cof_{i,j} = (-1)^{i+j} M(i,j)$$

$M(i,j)$ est le déterminant mineur, c'est à dire le déterminant de la matrice obtenue en ôtant la ligne i et la colonne j.

Définissons tout d'abord le calcul dans les cas n=2 et n=3.

- <u>Matrice carrée d'ordre 2</u>

  On pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

  alors $det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

  Le déterminant correspond à l'aire du parallélogramme formé par les 2 vecteurs (a,b) et (c,d).

- <u>Matrice carrée d'ordre 3</u>

  Nous pouvons utiliser la règle de Sarrus (**valable uniquement pour des matrices 3x3**).

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

alors $det(A) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{on recopie } L_1 \text{ et } L_2} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$

Le déterminant correspond au volume du parallépipède formé par les 3 vecteurs (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) et (a_3, b_3, c_3).

- Matrice carrée d'ordre 4

Il faut revenir au cas n=3.

Prenons un exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Règle des signes : $\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$

On développe le déterminant suivant une ligne ou une colonne de son choix en respectant le tableau de signe ci-dessus (qui correspond à $(-1)^{i+j}$ dans la formule du déterminant) .

On cherche si possible une ligne ayant beaucoup de 0.

On développe ici par rapport à L_2.

$$det(A) = -(-1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant mineur relatif à } (-1)} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant mineur relatif à } (0)} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant mineur relatif à } (1)} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant mineur relatif à } (0)}$$

Le déterminant mineur relatif à (-1) ou a_{21} est obtenu en "supprimant" la ligne et la colonne où se trouve (-1).

- Matrice carrée d'ordre supérieur n

Il n'y a pas de méthode simple. On se ramène à des déterminants d'ordre n-1 en développant suivant une ligne ou une colonne ayant beaucoup de 0 ou bien on peut au préalable faire apparaître des 0 en manipulant les lignes ou les colonnes.

4.2 Propriétés du déterminant

- Inverser 2 lignes (ou 2 colonnes) change le signe du déterminant.
- Ajouter à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ne modifie pas le déterminant. On pourra ainsi faire apparaître des zéros pour simplifier le calcul du déterminant.
- Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont nuls alors le déterminant est nul.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de sa diagonale.
- det (AB) = det(A).det(B)
- det (A) = det(^{t}A)
- det (λA) =λ^n det(A) où n est l'ordre de la matrice A
- A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$

Exemples :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1*(-4) - 2*3 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1*0*2 + 3*(-3)*(-1) + (-1)*2*4 - (-1)*0*(-1) - 4*(-3)*1 - 2*2*3 = 1$$

5 Systèmes d'équations linéaires

5.1 Définition

On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** tout système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & y_2 \\ & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & y_n \end{array}\right.$$

- Les a_{ij} sont les **coefficients du système.**
  La matrice $A = (a_{ij})$ est appelée **matrice du système.**
  Les coefficients $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont les seconds membres.
- Le système est dit triangulaire si la matrice A est triangulaire.
- Le système est dit carré si n=p.
- Un système carré est dit de Cramer si sa matrice A est inversible.

5.2 Ecriture matricielle

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice du système.

Soient $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ (2nds membres) et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ (inconnues)

Le système s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2p} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$

Soit $AX = Y$.

- Cas matrice carrée (n=p) :
    - A inversible : Le système est dit de Cramer et il possède une solution unique $X = A^{-1}Y$.
    - A non inversible : généralement, il n'y a pas de solution.
- Cas matrice non carrée :
    - Si n>p, il y a plus d'équations que d'inconnues. Le système est sur-déterminé. Il n'y a pas de solution.
    - Si p>n, il y a plus d'inconnues que d'équations. Le système est sous-déterminé. Il y a une infinité de solutions.

5.3 Méthodes de résolution

5.3.1 Système de Cramer $\neq 0$

Un système carré est dit de Cramer si sa matrice est inversible.

On a donc une solution unique.

Notons $\Delta = det(A)$ ($\Delta \neq 0$).

On détermine Δ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, le déterminant de la matrice A_k obtenue en remplaçant la colonne C_k de A par Y.

On obtient alors : $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$

Exemple :

Cherchons à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$

Calculons le déterminant Δ de la matrice.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 8 + 9 - (-12 - 4 + 3) = 12$$

Calculons ensuite les déterminants Δ_k

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 3 & 4 \\ \mathbf{0} & -1 & 1 \\ \mathbf{3} & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 0 + 9 - (-12 - 6 + 0) = 24 \text{ Soit } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 9 - (0 + 6 + 3) = 12 \text{ Soit } y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -6-6+0-(-9+0+9) = -12 \text{ Soit } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$$

Le système a donc pour solution $x = 2$, $y = 1$ et $z = -1$

5.3.2 Méthode du Pivot de Gauss

Par des opérations élémentaires, on transforme le système en un système diagonal ou triangulaire (dans ce cas, on terminera par substitution).

Opérations élémentaires

Une opération élémentaire est une opération qui transforme un système en un système équivalent (ayant les même solutions). Les opérations suivantes sont des opérations élémentaires :

- Multiplier une équation (ligne) par un scalaire non nul.

$$L_i \leftarrow \alpha L_i$$

- Ajouter à une équation (ligne) un multiple d'une autre équation (ligne).

$$L_i \leftarrow L_i \alpha L_j$$

- Échanger 2 équations (lignes).

$$L_i \leftarrow \alpha L_j$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On commence avec pour pivot, la valeur située en position $a_{1,1}$. Ici ce serait le 2. On peut cependant inverser la première et la deuxième ligne afin de travailler avec un pivot de 1. On débute alors avec le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On fait apparaître des zéros dans la colonne du pivot en faisant des opérations entre chaque ligne et la ligne du pivot. Cette dernière reste inchangée lors de l'étape.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5L_1 + L_2 \\ \\ 5L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \quad L_3/12 \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1+7L_3 \\ L_2+2L_3 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1/5 \\ L_2/5 \\ L_3/-1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système a donc pour solution $x = 2$, $y = 1$ et $z = -1$

6 Inversion de matrices

6.1 Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, la matrice A^{-1}, si elle existe **(detA$\neq$ 0)**, est la matrice inverse de A telle que $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_n$.

Une matrice carrée non inversible est dite **singulière**.

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode du pivot (ou de Jordan)

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n. Pour calculer A^{-1}, on place A et I_n dans un tableau n lignes et 2n colonnes.
On effectue des opérations élémentaires sur les lignes afin de faire apparaître la matrice I_n à gauche. On obtiendra la matrice inverse A^{-1} à droite.

$$\boxed{(A \vdots I_n) \Rightarrow (I_n \vdots A^{-1})}$$

Exemple :

Cherchons à inverser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$det(A) = -30$ donc la matrice est inversible.

On commence par écrire côte à côte la matrice A et la matrice identité puis on effectue les même opérations que pour résoudre les systèmes d'équations par la méthode du pivot.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait apparaitre des zéros dans la colonne du pivot en faisant des opérations entre chaque ligne et la ligne du pivot. Cette dernière reste inchangée lors de l'étape.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4L_1 + 3L_2 \\ \\ 7L_2 - 4L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-30} & -2 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5L_1 - L_3 \\ 5L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -8 & 8 & 4 \\ 0 & -20 & 0 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -30 & -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1/20 \\ L_2/-20 \\ L_3/-30 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse A^{-1} est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$

6.2.2 Méthode des déterminants

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det A}\, {}^{t}Adj(A)}$$

Avec Adj(A) : matrice adjointe ou co-matrice de A ou matrice des cofacteurs

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent par la méthode des déterminants :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad det(A) = -30$ *donc la matrice est inversible.*

*On calcule ensuite la matrice adjointe (**Attention** à ne pas oublier la règle des signes).*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -2 \\ -12 & -3 & 7 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite la transposée de cette matrice.

$${}^{t}Adj(A) = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -6 \\ -12 & -3 & 6 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

On divise ensuite par le déterminant.

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 12 & -12 & -6 \\ -12 & -3 & 6 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

6.2.3 Résolution des systèmes à l'aide de l'inverse

Si on reprend l'écriture matricielle d'un système, à savoir $Y = AX$, et que la matrice A est inversible, on peut déterminer le vecteur solution par $X = A^{-1}Y$.

Exemple :

Reprenons la résolution du système d'équation à l'aide de l'inversion de matrice.

La matrice du système est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule son inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -9/12 & 7/12 \\ 1/6 & -1 & 1/6 \\ 1/12 & 13/12 & -5/12 \end{pmatrix}$$

On calcule $X = A^{-1}Y$ *et on retrouve les résultats précédents.*