R2.04
TD1 Calcul Matriciel

1. Trouver la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 4}$ telle que $a_{ij} = i - 2j$

2. On considère les matrices A et B suivantes :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculer A-B ainsi que A+3B.

3. On considère les matrices A et B suivantes :

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice X vérifiant l'égalité 3A-2X=B.

   Déterminer les matrices Y et Z vérifiant le système suivant : $\begin{cases} Y + 2Z = A \\ 2Y + 3Z = B \end{cases}$

4. On considère les matrices :

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits suivants $A * B$, $B * A$, $A * C$, $C * A$, $A * D$, $D * A$, $B * C$, $C * B$, $C * D$ et $D * C$.

5. On considère les matrices :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calculer $(A - 2B) * C$, ${}^tC * A$, ${}^tC * B$, ${}^tA * A$, $A *^t A$, ${}^tA * B$ et ${}^tC * ({}^tA + 3^tB)$.

Maths

TD 1 Calcul Matriciel

1. $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & 6 & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

A = matrice carré

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A-B = \begin{pmatrix} (1-(-2)) & (3-1) & ((-1)(-1) \\ (0-3) & 1-(-4) & 2-0 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 9 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

$A-B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$A+3B = \begin{pmatrix} (1+-6) & (3+3) & (-1+-3) \\ (0+9) & (1+-12) & (2+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 9 & -11 & 2 \end{pmatrix}$

3. ~~A=~~ $3A - 2X = B$

$2X = 3A - B$

$X = \frac{1}{2}(3A - B)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}}$$

$\frac{1}{2}(3A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

R2.04
TD2 Calcul de déterminants

1. Propriétés des déterminants :

   On donne $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
   $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
   Calculer les déterminants suivants : $det(A)$, $det(B)$, $det(^tA)$, $det(AB)$, $det(3A)$ et retrouver les propriétés du cours.

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Bonus :** Calculer le déterminant des matrices 4x4 suivantes :

   $$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
   $$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1 \times 1) - (3 \times 2) = (-1) - 6 = -7$

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (0 \times 4) - (2 \times -3) = 0 - (-6) = 6$

$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1 \times 1) - (2 \times 3) = (-1) - 6 = -7$

$A \times B = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \to \det AB = \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = (-9 \times 8) - (10 \times -3) = (-72) - (-30$

$= -42$

$3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \to \det(3A) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = (-3 \times 3) - (9 \times 6) = (-9) - 54 = -63$

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{matrix}$

$= +(\cos\theta \times \cos\theta \times 1) + (\sin\theta \times 0 \times 0) + (0 \times \sin$

$-(0 \times \cos\theta \times 0) - (0 \times 0 \times \cos\theta) - (1 \times \sin\theta \times -s$

$= (\cos\theta \times \cos\theta) + (\sin\theta \times -\sin\theta)$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{matrix}$

$= +(1 \times 2 \times 1) + (2 \times -3 \times -2) + (3 \times 1 \times -4) - (3 \times 2 \times -2)$

$-(1 \times -3 \times -4) - (2 \times 1 \times 1)$

$= +2 + (12) + (-12) - (-12) - (12) - (2)$

$= 0$

R2.04
TD3 Systèmes d'équations

Calculer le déterminant des matrices puis résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & z & = & 10 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 9 \\ 5x & + & 3y & + & z & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 9 \\ x & + & 5y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & 13 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 11 \\ & & 4y & - & 3z & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 3z & = & 26 \\ x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 7y & + & z & = & 31 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 3z & & & = & -3 \\ 4x & & & + & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & + & t & = & -7 \\ & & y & + & 3z & - & t & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & -3 \\ 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 9 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & -2 \\ 3x & - & 2y & & & - & t & = & 9 \end{array}\right.$$

①

TD3 Système d'équation

<u>D'abord :</u>

$$\begin{cases} x + 4y + z = 10 \\ 3x - 4y + 2z = 9 \\ 5x + 3y + z = 13 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\det |A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = +(1\times(-4)\times 1) + (3\times 3\times 1) + (5\times 4\times 2) - (5\times(-4)\times 1) - (1\times 3\times 2) - (3\times 4\times 1)$$

$$= +(-4) + 9 + 40 - (-20) - 6 - 12 = 47$$

<u>Ensuite :</u>

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 2 \\ 13 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 2 \end{vmatrix} = +(10\times(-4)\times 1) + (9\times 3\times 1) + (13\times 4\times 2) - (13\times(-4)\times 1) - (10\times 3\times 2) - (9\times 4\times 1)$$

$$= +(-40) + 27 + 104 - (-52) - 60 - 36 = 47$$

$$\hookrightarrow x = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{47}{47} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 13 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = +(1\times 9\times 1) + (3\times 13\times 1) + (5\times 10\times 2) - (5\times 9\times 1) - (1\times 13\times 2) - (3\times 10\times 1)$$

$$= +9 + 39 + 100 - 45 - 26 - 30 = \cancel{13}\ 47$$

$$\hookrightarrow y = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{47\ \cancel{13}}{47} = \cancel{0{,}276}\ 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & 13 \\ 1 & 4 & 10 \\ 3 & -4 & 9 \end{vmatrix} = +(1\times(-4)\times 13) + (3\times 3\times 10) + (5\times 4\times 9) - (5\times(-4)\times 10) - (1\times 3\times 9) - (3\times 4\times 13)$$

$$= 235$$

$$\hookrightarrow z = \frac{\Delta 3}{\Delta} = \frac{235}{47} = 5$$

<u>Enfin :</u>

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\ \cancel{-0{,}276} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(A \,\vdots\, Y) \Leftrightarrow (I \,\vdots\, X)$$

5

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 26 \\ x + 3y - z = 2 \\ 2x + 7y + z = 31 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 26 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & 26 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 31 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 26 \\ 2 & 7 & 1 & 31 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{l} 16L_1 + 3L_2 \\ \\ 16L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 8 & 80 \\ 0 & -16 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 56 & 448 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \frac{L_3}{56} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 8 & 80 \\ 0 & -16 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - 8L_3 \\ L_2 - 8L_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -16 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 / 16 \\ L_2 / -16 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad \text{résultat} = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 8 \end{array}$$

6

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + 0 = -3 \\ 4x + 0 + 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - 2z + t = -7 \\ 0 + 1y + 3z - t = 13 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{résultat} = \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ 2L_3 - 3L_1 \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & -4 & -3 & 14 \\ 0 & -11 & -13 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ \\ L_3 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 10 & 3 & -20 \\ 0 & -10 & -4 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & -9 & 5 & -19 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ 2L_2 - L_3 \\ \\ 3L_4 + L_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & 8 & -39 \\ 0 & -19 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & -1 & -9 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc} 4 & -9 & 1 & 0 & 99 \\ 0 & 60 & 8 & 0 & 149 \\ 0 & -12 & -18 & 0 & 113 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & 15 \end{array}\right)$$

$L_1 - 4L_4$

$2L_2 + 11L_4$

$2L_3 - 5L_4$

R2.04
TD4 Inversion de matrices

1. Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer A^2

   (b) Déterminer, si il existe, l'inverse de A.

   (c) Déterminer A^n pour $n > 0$

   (d) Déterminer $(A^n)^{-1}$ pour $n > 0$

3. **Bonus :** Calculer l'inverse de cette matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

TD 4 - Inversion de matrice

1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det |A| = -6 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 - 2L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) 2L_1 + L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/-6 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{-6} \end{array}\right) A^{-1}$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det |B| = 0$ Impossible

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det |C| = 5 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) 5L_1 + 2L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/5 \\ L_2/5 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$D = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \rightarrow \det |D| = 1$

$Adj(D) = \begin{pmatrix} +|\cos t| & -|\sin t| \\ -|\sin t| & +|\cos t| \end{pmatrix} \quad {}^t Adj(D) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = A^{-1}$

R2.04
TD5 Bilan calcul matriciel

1. Trouver toutes les matrices 2*2 commutant avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ecrire $A = 3I_3 + J$. Calculer J^2. En déduire A^2 et A^{-1}.

4. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. On cherche à déterminer l'équation d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points (1 ;4), (-2 ;-5) et (-1 ;0). Déterminer les coefficients a, b et c.

   (a) Exprimer l'appartenance de ces points à la parabole sous forme d'un système S. En déduire l'écriture de ce système sous la forme AX=B.

   (b) Calculer l'inverse de A.

   (c) Calculer les coefficients a, b et c.

6. Soit S un système d'équations linéaires à 3 inconnues :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Discuter, selon les valeurs de m, les solutions du système. Résoudre le système.

TD5

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$

$A \times B$ $\qquad$ $B \times A$

$$\begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

3.

$A = 3I_3 + J$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = (3I_3 + J)^2 = (3I_3)^2 + 2 \times 3I_3 \times J + J^2$

$A^2 = 9I_3 + 6I_3J + 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$A \qquad A^{-1}$

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$

$A \times \underbrace{(\quad)}_{A^{-1}} = I_3$

$\underbrace{(\quad)} \times A = I_3$

Sachant que :

$A^2 - 6J = 9I_3$

$A^2 - 6 \times (A - 3I_3) = 9I_3$

(car $A = 3I_3 + J$ donc inversé)

$A^2 - 6A + 18I_3 = 9I_3$

$A^2 - 6A = -9I_3$

$A(A - 6I_3) = -9I_3$

$A \times \underbrace{\frac{(A - 6I_3)}{-9}}_{A^{-1}} = I_3$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$y = ax^2 + bx + c$

5. $(1, 4)$; $(-2, -5)$ et $(-1, 0)$

a)

$$S \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a - 2b + c = -5 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{matrix}$$

b)

$$\begin{aligned} \det |A| &= +(1 \times (-2) \times 1) + (4 \times (-1) \times 1) + (1 \times 1 \times 1) - (1 \times (-2) \times 1) - (1 \times (-1) \times 1) - (4 \times 1 \times \\ &= +(-2) + (-4) + 1 - (-2) - (-1) - 4 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$(A \mid I_3) \longleftrightarrow (I_3 \mid A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 6L_1 + L_2 \\ \\ 3L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 / 6 \\ L_2 / -6 \\ L_3 / 3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2$$

$m^3 - 3m + 2 = 0$

$m = 1$ est racine évidente

$$(m-1)\underbrace{(\qquad)}_{\text{degré } 2} = m^3 - 3m + 2$$

$$\begin{array}{l|l} m^3 \qquad -3m + 2 & m-1 \\ -(m^3 - m^2) & m^2 + m - 2 \\ 0 + m^2 - 3m + 2 & \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times -2 = 9 \\ -(m^2 - m) & m_1 = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ 0 - 2m + 2 & \\ -(-2m + 2) & m_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

Le système a 1 sol unique seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -2$

$m^3 - 3m + 2 = (m-1)(m-1)(m+2) = (m-1)^2(m+2)$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}$$

$= m^3 + m^2 - 1 + m$
$= (m-1)(1-m^2)$ $\Big\}\ x = \dfrac{m+1}{m+2}$ $\qquad$ $= m^2 - 2m + 1$
$= (m-1)^2$ $\Big\}\ y = \dfrac{1}{m+2}$ $\qquad$ $= m^4 - 2m^2 + 1$
$= (m^2-1)^2$ $\Big\}\ z = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$