Développement limités

Exemple

1)

* $f : x \longmapsto \sin(x)$

admet des dérivés continues à n'importe quel ordre sur $\mathbb{R}$

$f(x) = \sin(x)$	$f(0) = \sin(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = \cos(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x)$	$f''(0) = -\sin(0) = 0$
$f^{[3]}(x) = -\cos(x)$	$f^{[3]}(0) = -\cos(0) = -1$
$f^{[4]}(x) = \sin(x)$	$f^{[4]}(\theta x) = \sin(\theta x)$

Pour tout réel x :

* $f(x) = f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f''''(\theta x)$ où θ est un réel de $]0, 1[$

* $f(x) = 0 + x \times 1 + \frac{x^2}{2!} \times 0 + \frac{x^3}{3!} \times (-1) + \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)$

Il était un réel $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)}$$

2) du 1$^{\text{erement}}$ on en déduit :

$3! = 6$
$4! = 24$

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)$$

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^4}{24} \sin(\theta x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \sin(\theta x) \leqslant 1$ $\left(\times \frac{x^4}{24}\right)$ positif

$$-\frac{x^4}{24} \leqslant \frac{x^4}{24} \sin(\theta x) \leqslant \frac{x^4}{24}$$

donc $\left| \frac{x^4}{24} \sin(\theta x) \right| \leqslant \frac{x^4}{24}$

$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^4}{24} \sin(\theta x)$

donc $\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| = \left|\frac{x^4}{24} \sin(\theta x)\right| \leqslant \frac{x^4}{24}$

$$\boxed{\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^4}{24}}$$

Développement limité usuels.

$f(x) = e^x$

$DL_4(0)$ de f

$f(x) = f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{[3]}(0) + \frac{x^4}{4!} f^{[4]}(0) + x^4 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f^{[3]}(x) = e^x$

$f^{[4]}(x) = e^x$

$e^x = e^0 + x \times e^0 + \frac{x^2}{2!} e^0 + \frac{x^3}{3!} e^0 + \frac{x^4}{4!} e^0 + x^4 \varepsilon(x)$

$$\boxed{e^x = 1 + x \times 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)}$$

$DL_4(0)$ de $f(x) = e^x$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x)$

La partie régulière de ce développement limité est $\boxed{P_f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}$

2. Exemple :

$$f(x) = e^x \times \sqrt{1+x} \qquad = u(x) \times v(x)$$

$$u(x) = e^x \qquad v(x) = \sqrt{1+x}$$

$$P_u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad P_v(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$Pf(x) = 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2}x + 1 \times \left(-\frac{1x^2}{8}\right) + x \times 1 + x \times \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2} \times 1$$

$$Pf(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\boxed{Pf(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2}$$

Théorème - Quotient :

Exemple :

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad u(x) = \sin(x) \qquad v(x) = \cos(x)$$

$$P_v(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad P_u(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} \\ \hline -\left(x - \frac{x^3}{2}\right) & x + \frac{x^3}{3} \\ \hline \frac{x^3}{3} & \\ -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}\right) & \\ \hline \frac{x^5}{6} & \end{array}$$

$$\boxed{Pf(x) = x + \frac{x^3}{3}}$$

Théorème - Composition :

Rq : $\sin(0) = 0$

$f(x) = e^{\sin(x)} = u \circ v(x)$

$v(x) = \sin(x)$ $\qquad u(x) = e^x$

$P_v(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ $\quad \Big\{ \quad P_u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$P_u \circ P_v(x) = P_u(P_v(x)) = P_u\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

$P_f = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \longrightarrow$

$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2)\ldots$

$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} = \frac{1}{6}(x^3)\ldots$

On ne prend pas les valeurs supérieur au facteur 3

$P_f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Théorème - Dérivation et intégration d'un DL

Exemple : $\quad F(x) = \ln(1 + x)$

$F'(x) = \frac{1}{x+1}$ $\qquad \ln(u)' = \frac{u'}{u}$

$F(x)$ est donc une primitive de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$

On la partie régulière du $DL_3(0)$ de $f(x)$ est :

$P_f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$

Ainsi la partie régulière du $DL_4(0)$ de $F(x)$ est :

$P_F = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

3 mars

finir exo 3

Calculons $I_4 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\, dx$

on pose $v(x) = x^2$ $\quad u(x) = \sin(x)$

$v'(x) = 2x$ $\quad u'(x) = \cos(x)$

$I = x^2 \left[\sin(x) \times x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \times 2x$

$I = (\sin(\pi/2) \times \pi/2) -$

$I_5 = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(2x)\, dx$

Posons $f(x) = \sin(x) \cos(2x)$

Fonction	Primitive
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$f(x) = \sin(x) \times (2\cos^2(x) - 1)$

$\boxed{f(x) = 2\sin(x) \cos^2(x) - \sin(x)}$

posons : $u(x) = \cos(x)$
$u'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = 2 \times (-1) \times (-\sin(x)) \times \cos^2(x) - \sin(x)$

$f(x) = -2 \times u'(x) \times u^2(x) - \sin(x)$ forme $u' \times u^n$ avec $n = 2$

$F(x) = -2 \times \frac{1}{3} \times u^3(x) + \cos(x)$ est une primitive de f sur $[0 ; \pi]$

$F(x) = -\frac{2}{3} \cos^3(x) + \cos(x)$

$I_5 = \left[F(x)\right]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$

$I_5 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$F(\pi) = -\frac{2}{3} \times (-1)^3 + (-1) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

$F(0) = -\frac{2}{3}(1)^3 + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

Exemple cours : changement de variable

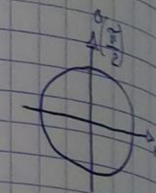
$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Changement de variable : $x = \sin(t)$ donc $t = \arcsin(x)$

• Nouvelle bornes

si $x = 0$ alors $t = \arcsin(0) = 0$

si $x = 1$ alors $t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$



•• $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$

ici $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(t) > 0$ et $|\cos(t)| = \cos(t)$

$\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$

•••

$x = \sin(t)$

$$\boxed{1 \times dx = \cos(t)\,dt}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

Remarque : $\cos 2(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) -$

$2\cos^2(t) - 1 = \cos 2(t)$

$2\cos^2(t) = 1 + \cos 2(t)$

$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos^2(t)}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cos 2(t)\right)$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(t)\right) dt$$

$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(t)$

$G(t) = \frac{1}{2}(t) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin 2(t)$

$G(t) = \frac{1}{2}(t) + \frac{1}{4}\sin 2(t)$

$I = \left[G(t)\right]_0^{\pi/2} = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0)$

$I = \frac{\pi}{4} + 0 - (0 + 0) \rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

$3! = 3\times2\times1 = 6$

-Formules de Taylor, développements limités-

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$

Théorème : Soit f une fonction numérique admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur [a , b] et dérivable à l'ordre (n+ 1) sur]a , b[.
Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{[n]}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{[n+1]}(c).$$

factoriel

En posant b = x et en considérant le cas où a = 0, on obtient :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{[n]}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{[n+1]}(\theta x)\text{, où } \theta \text{ est un réel de }]0;1[.$$

(dérivé en n prise en 0)

Exemple :

1- Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]0;1[$ tel que pour tout réel x : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin(\theta x)$.

2- En déduire que pour tout réel x : $\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \le \frac{x^4}{24}$.

On peut donc considérer que sin(x) peut être approché par $x - \frac{x^3}{6}$ et l'erreur commise est inférieure à $\frac{x^4}{24}$.

-Développements limités-

Définition : Si f est une fonction définie au voisinage de 0, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 ($DL_n(0)$) s'il existe un polynôme P_n de degré n (appelé partie régulière du DL) tel que :

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0.$$

ebsilone

Propriétés :
Pour tout entier n on a : $P_n(0) = f(0)$.
Si f admet un $DL_n(0)$ avec $n \ge 1$ alors f est dérivable en 0.
Si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.
Le polynôme P_n a la même parité que f.
Si f admet un $DL_n(0)$ alors elle admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \le n$.

d'ordre n

imple → exple

Théorème : Si f une fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur [a , b] et dérivable à l'ordre (n+ 1) sur]a , b[alors Si f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{[n]}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0.$$

-Développement limités usuels-

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

Théorème : Somme et produit on doit aller jusqu'à l'ordre équivalent au nombre de termes

Soient f et g admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g.

1. La somme f + g admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P_f + P_g$.
2. Le produit $f \times g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en effectuant le produit $P_f \times P_g$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple : Déterminer le ~~$DL_2(0)$~~ P_g de $x \mapsto e^x \times \sqrt{1+x}$.

Théorème : Quotient

Soient f et g admettant des $DL_n(0)$ avec $g(0) \neq 0$.

Le quotient $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient par division suivant les puissances croissantes de P_f par P_g à l'ordre n.

Exemple : Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Théorème : Composition

Si f possède un $DL_n(0)$ avec $f(0) = 0$ et si g possède un $DL_n(0)$ alors $g \circ f$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en considérant $P_g \circ P_f$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple : Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sin x}$.

Théorème : Dérivation et intégration d'un DL.

Si f possède un $DL_n(0)$ de partie régulière P_f.

1. Si f ' admet un $DL_{n-1}(0)$ alors $P_{f'} = (P_f)'$.
2. Toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(0)$;

La partie régulière P_F s'obtient en intégrant P_f avec $P_F(0) = F(0)$.

Exemple : Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto$ ~~arctan~~(x).

$\ln(1+x)$

-Méthodes d'intégration-

1- Intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur [a;b] à dérivées continues sur [a;b].

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

*** Démonstration**

Méthode :

- On essaie d'utiliser une intégration par parties lorsqu'on ne peut trouver directement des primitives.
- Dans tous les cas, on peut recourir à la méthode suivante : la méthodes des ALPES.

A	L	P	E	S
arcsin arccos arctan	ln log	polynômes	exp.	sin cos tan

Principe :
Pour appliquer la formule ci-dessus, on choisit comme fonction v le premier type de fonctions rencontré lorsqu'on lit ALPES .

Exemple : Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$, on doit intégrer le produit d'une fonction polynôme (P) par la fonction sinus (S). La première lettre rencontrée dans ALPES étant le P, on pose v(x) = x et u'(x) = sin(x).

Exemple : Calculer $I = \int_1^e x \ln(x)dx$.

2-Changement de variable

On considère des fonctions intégrables sur un intervalle [a ; b].

Théorème : Soients α et β deux réels, φ étant un fonction bijective, continûment dérivable sur $[\alpha ; \beta]$ et f une fonction continue sur [a ; b] avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\rho'(t)dt .$$

Exemple : Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

Ici, on prend $\varphi(t) = \sin(t)$.
Ici a = 0 et b = 1, on cherche les valeurs de t telles que :

- $\sin(t) = 0$ soit $t = 0$, on prend $\alpha = 0$
- $\sin(t) = 1$ soit $t = \frac{\pi}{2}$, on prend $\beta = \frac{\pi}{2}$

φ est une fonction bijective, continûment dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi'(t) = \cos(t)$

Méthode :

- Penser à changer les bornes de l'intégrale
- Exprimer x sous la forme $\varphi(t)$ puis remplacer dx par $\varphi'(t)dt$
- Simplifier et calculer l'intégrale.