

# Ergodicité de dynamiques de McKean-Vlasov

## Mesures invariantes et distributions quasi-stationnaires

 Mohamed, Alfaki **ABOUBACRINE ASSADEK**



Thèse présentée et soutenue à Angers, le 29 septembre 2025 devant le jury :

<u>Président :</u>	Loïc	CHAUMONT	Professeur des universités
<u>Examineurs :</u>	Arnaud	GUILLIN	Professeur des universités
	Eva	LÖCHERBACH	Professeur des universités
<u>Rapporteurs :</u>	François	BOLLEY	Professeur des universités
	Zhenjie	REN	Professeur des universités
<u>Directeur de thèse :</u>	Fabien	PANLOUP	Professeur des universités

# Plan

- 1 Mise en contexte
- 2 Résultats du chapitre 1
- 3 Résultats du chapitre 2
- 4 Résultats du chapitre 3
- 5 Perspectives

# Mise en contexte

# Processus de McKean-Vlasov

Introduction : Henry McKean en 1966 (modèle pour l'équation de Vlasov)  
Physique statistique : modélisation d'un gaz à forte densité de particules

## Définition

$$dX_t = b(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t})dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t})dB_t. \quad (1)$$

# Limites de champ moyen

Propagation du chaos : Marc Kac

Définition : système de particules en interaction de champ moyen

$(X_0^{(n),i})_{i=1,\dots,n}$  sont des copies de  $X_0$  indépendantes.

$$dX_t^{(n),i} = b(t, X_t^{(n),i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{(n),i}}) dt + \sigma(t, X_t^{(n),i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{(n),i}}) dB_t^{(i)}. \quad (2)$$

Couplage synchrone : Alain-Sol Sznitman

Propagation du chaos : loi des grands nombres asymptotique

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{(n),i}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{X_t} \quad p.s. \quad (3)$$

# Problème de martingale non linéaire

$\mathcal{L}^\mu := b(\cdot, \cdot, \mu) \cdot \nabla + \frac{1}{2} \text{trace}(\sigma \sigma^*(\cdot, \cdot, \mu) \nabla^2)$  (générateur infinitésimal)  
 $dX_t^\mu = b(t, X_t^\mu, \mu) dt + \sigma(t, X_t^\mu, \mu) dB_t^\mu$  (processus interaction figée)  
 $P_t^\mu \varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(X_t^\mu) | X_0^\mu = x]$  (sémi-groupe)

Formule d'Itô le long d'un flot de mesures de probabilité

$$\partial_t \Psi(\mathbb{P}_{X_t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}^{\mathbb{P}_{X_t}} \frac{\delta \Psi}{\delta m}(\mathbb{P}_{X_t}, \cdot)(x) \mathbb{P}_{X_t}(dx). \quad (4)$$

$\Psi \in \mathcal{C}^{1,2}$  :

$$\frac{d}{dt} \Psi(t\mu_1 + (1-t)\mu_0) = \int \frac{\delta \Psi}{\delta m}(t\mu_1 + (1-t)\mu_0, x)(\mu_1 - \mu_0)(dx) \quad (5)$$

et  $\frac{\delta \Psi}{\delta m}(\mu, \cdot) \in \mathcal{C}^2$ .

**Exemple** :  $\Psi_\varphi : \mu \mapsto \int \varphi d\mu$  ;  $\frac{\delta \Psi}{\delta m}(\mu, x) = \varphi(x) + C_\mu$  ;  $\partial_t \mathbb{P}_{X_t} = \mathbb{P}_{X_t} \mathcal{L}^{\mathbb{P}_{X_t}}$ .

# Dynamiques de Langevin de champ moyen

Soient  $A$  un champ de vitesses,  $B$  un champ de positions et  $H$  un hamiltonien macroscopique admettant une dérivée plate  $\frac{\delta H}{\delta m}$ .

## Processus de Langevin de champ moyen

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla \frac{\delta H}{\delta m}(\mathbb{P}_{X_t}, X_t)dt; \quad (6)$$

$$\begin{cases} dP_t &= V_t dt; \\ dV_t &= \sqrt{2}dB_t - A(V_t)dt - B(P_t)dt - \nabla \frac{\delta H}{\delta m}(\mathbb{P}_{P_t}, P_t)dt. \end{cases} \quad (7)$$

# Formule d'Itô le long d'un flot de mesures

## Équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_{X_t} = \Delta \mathbb{P}_{X_t} + \nabla \cdot \left( \mathbb{P}_{X_t} \nabla \frac{\delta H}{\delta m} (\mathbb{P}_{X_t}, \cdot) \right); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_{(P_t, V_t)} &= \Delta_v \mathbb{P}_{(P_t, V_t)} - v \cdot \nabla_p \mathbb{P}_{(P_t, V_t)} \\ &+ \nabla \frac{\delta H}{\delta m} \left( \mathbb{P}_{P_t}, \cdot \right) \cdot \nabla_v \mathbb{P}_{(P_t, V_t)} \\ &+ \nabla_v \cdot \left( (A(v) + B(p)) \mathbb{P}_{(P_t, V_t)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

# Mesures invariantes

## Solutions non évolutives

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P} X_t = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}(P_t, V_t) = 0. \quad (11)$$

## Points fixes : processus non cinétique

$\mu_\infty$  est une mesure de probabilité invariante pour  $(X_t)_{t \geq 0}$  si, et seulement si,

$$\mu_\infty = \Phi(\mu_\infty) \quad (12)$$

avec  $\mu \mapsto \Phi(\mu)$  telle que

$$\Phi(\mu)(dx) := \frac{1}{Z_\mu} e^{-\frac{\delta H}{\delta m}(\mu, x)} dx. \quad (13)$$

# Fonctionnelles de Lyapunov de champ moyen

## Énergie et information de Fisher

Pour toute fonctionnelle  $E$  admettant une dérivée plate, on a

$$\frac{d}{dt} E(\mathbb{P}_{X_t}) = \int \frac{\delta E}{\delta m}(\mathbb{P}_{X_t}, x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_{X_t}(dx). \quad (14)$$

On en déduit que  $\mathbf{E}_{CM} := \mathbf{H}[\cdot|dx] + H$  (énergie de champ moyen) est une fonctionnelle de Lyapunov :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E}_{CM}(\mathbb{P}_{X_t}) = -4\mathbf{IF}_{CM}(\mathbb{P}_{X_t}) \leq 0 \quad (15)$$

avec (information de Fisher de champ moyen)

$$\mathbf{IF}_{CM}(\mu) := \frac{1}{4} \int \left\| \nabla \frac{\delta \mathbf{E}_{CM}}{\delta m}(\mu, x) \right\|^2 \mu(dx). \quad (16)$$

# Points critiques de l'énergie

Information de Fisher et mesures invariantes

$$\mathbf{IF}_{CM}(\mu_\infty) = 0 \iff \nabla \frac{\delta \mathbf{E}_{CM}}{\delta m}(\mu_\infty, \cdot) = 0 \quad \mu_\infty - p.s. \quad (17)$$

# Inégalité log-Sobolev et lemme de Gronwall

## Définition

On dit que  $\mu_\infty$  satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique si, et seulement si, il existe  $\rho_{LS} > 0$  telle que

$$\rho_{LS}(\mathbf{E}_{CM} - \mathbf{E}_{CM}(\mu_\infty)) \leq 2\mathbf{I}_{CM}. \quad (18)$$

## Dissipation d'entropie

$$\mathbf{E}_{CM}(\mathbb{P}_{X_t}) - \mathbf{E}_{CM}(\mu_\infty) \leq (\mathbf{E}_{CM}(\mathbb{P}_{X_0}) - \mathbf{E}_{CM}(\mu_\infty))e^{-2\rho_{LS}t}. \quad (19)$$

# Systèmes de particules de champ moyen

## Systèmes de particules de champ moyen

Soit l'hamiltonien microscopique  $H_n : \mathbf{x} \mapsto nH(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i})$ .

$$dX_t^{(n),i} = \sqrt{2}dB_t^{(i)} - \nabla_{x_i} H_n(X_t^{(n)})dt; \quad (20)$$

$$\begin{cases} dP_t^{(n),i} &= V_t^{(n),i} dt; \\ dV_t^{(n),i} &= \sqrt{2}dB_t^{(i)} - A(V_t^{(n),i})dt - B(P_t^{(n),i})dt - \nabla_{x_i} H_n(P_t^{(n)})dt. \end{cases} \quad (21)$$

## Mesures invariantes et fonctionnelles de Lyapunov : non cinétique

$$\mu^{(n)}(d\mathbf{x}) := \frac{1}{Z_n} e^{-H_n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Entropie relative :  $\mathbf{H}[\cdot | \mu^{(n)}]$ .

Information de Fisher relative :  $\mathbf{I}[\cdot | \mu^{(n)}]$ .

## Littérature : liste non exhaustive

A. Guillin, W. Liu, L. Wu, and C. Zhang. Uniform Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities for mean field particle systems

A. Guillin, W. Liu, L. Wu, and C. Zhang. The kinetic Fokker-Planck equation with mean field interaction

F. Bolley, A. Guillin, and F. Malrieu. Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck equation

A. Guillin and P. Monmarché. Uniform long-time and propagation of chaos estimates for mean field kinetic particles in non-convex landscapes

F. Chen, Z. Ren, and S. Wang. Uniform-in-time propagation of chaos for mean field langevin dynamics

P. Cattiaux, A. Guillin, and F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non-uniformly convex case

K. Hu, Z. Ren, D. Siska, and L. Szpruch. Mean-field langevin dynamics and energy landscape of neural networks

A. Kazeykina, Z. Ren, X. Tan, and J. Yang. Ergodicity of the underdamped mean-field langevin dynamics

# Résultats du chapitre 1

# Objectifs

Dynamiques de Langevin de champ moyen et dynamiques de Langevin cinétiques de champ moyen.

Établissement d'inégalités fonctionnelles non linéaires dans le cas d'un hamiltonien macroscopique polynomial.

# Interaction polynomiale

## Définition

$$H : \mu \mapsto \int V d\mu + \sum_{k=2}^N \int W^{(k)} d\mu^{\otimes k}. \quad (23)$$

## Exemple : équation des milieux granulaires ( $N = 2$ )

$$H(\mu) := \int V d\mu + \int W(x, y) \mu(dx) \mu(dy). \quad (24)$$

## Exemple : modèle inspiré de la construction des fonctions symétriques

$$H(\mu) := \int V d\mu + Q \left( \int G d\mu \right) \quad (25)$$

avec  $Q := \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^k \beta_j^{(k)} \binom{k}{j} X^j \in \mathbb{R}_N[X]$ .

# Interaction polynomiale

Exemple : modèle de Skyrme régularisé ( $N = 3$ )

$$H(\mu) := \int V d\mu + \int G_\sigma(x-y)\mu(dx)\mu(dy) \quad (26)$$
$$+ \int G_\sigma(x-y)G_\sigma(x-z)G_\sigma(y-z)\mu(dx)\mu(dy)\mu(dz)$$

avec  $G_\sigma := \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$  et  $\sigma > 0$ .

# Dissipation d'entropie et métrique de transport

## Définitions et hypothèses

$H : \mu \mapsto \int V d\mu + \sum_{k=2}^N \int W^{(k)} d\mu^{\otimes k}$  (hamiltonien macroscopique polynomial)

$V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  (potentiel de confinement)

$Z_V := \int e^{-V(x)} dx < +\infty$

$\alpha(dx) := \frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$  (mesure de Gibbs)

$\nabla^2 V$  est bornée par le bas.

$\exists c_1 \geq 0 \exists c_2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^d, x \cdot \nabla V(x) \geq c_1 \|x\|^2 - c_2$  (condition de Lyapunov)

$\forall k \in \{2, \dots, N\}, W^{(k)} \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^d)^k, \mathbb{R})$  (potentiel d'interaction)

$W^{(k)}$  est symétrique.

$\nabla^2 W^{(k)}$  est bornée et pour tout  $\lambda > 0, \int e^{\lambda W^{(k)}} d\alpha^{\otimes k} < +\infty$

$\mu^{(n)}$  satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique uniforme.

$\mu \mapsto \Phi(\mu)$  admet un unique point fixe.

# Dissipation d'entropie et métrique de transport

## Théorème ( $M.A^3$ )

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{H}_{CM}(\mathbb{P}_{X_t}) \leq \mathbf{H}_{CM}(\mathbb{P}_{X_0}) e^{-2\rho_{LS}t}; \quad (27)$$

$$\mathcal{W}_2^2(\mathbb{P}_{X_t}, \mu_\infty) \leq \frac{2}{\rho_{LS}} \mathbf{H}_{CM}(\mathbb{P}_{X_0}) e^{-2\rho_{LS}t} \quad (28)$$

avec  $\rho_{LS} > 0$  telle que

$$\rho_{LS} \mathbf{H}_{CM} \leq 2\mathbf{I}F_{CM}. \quad (29)$$

# Dissipation d'entropie cinétique

## Définitions et hypothèses

$H : \mu \mapsto \int V d\mu + \sum_{k=2}^N \int W^{(k)} d\mu^{\otimes k}$  (hamiltonien macroscopique polynomial)

$V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  (potentiel de confinement)

$Z_V := \int e^{-V(x)} dx < +\infty$

$\alpha(dx) := \frac{1}{Z_V} e^{-V(x)} dx$  (mesure de Gibbs)

$\nabla^2 V$  est bornée par le bas.

$\exists c_1 \geq 0 \exists c_2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^d, x \cdot \nabla V(x) \geq c_1 \|x\|^2 - c_2$  (condition de Lyapunov)

$\forall k \in \{2, \dots, N\}, W^{(k)} \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^d)^k, \mathbb{R})$  (potentiel d'interaction)

$W^{(k)}$  est symétrique.

$\nabla^2 W^{(k)}$  est bornée et pour tout  $\lambda > 0, \int e^{\lambda W^{(k),-}} d\alpha^{\otimes k} < +\infty$

$\mu^{(n)}$  satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique uniforme.

$\mu \mapsto \Phi(\mu)$  admet un unique point fixe.

$\forall v \in \mathbb{R}^d, A(v) = v; B \equiv 0$

$\forall k \in \{2, \dots, N\}, W^{(k)}$  est lipschitzienne;  $\|\nabla^2 V\| \leq K_1 \|\nabla V\| + K_2$

$\nu^{(n)} := \mu^{(n)} \otimes \mathcal{N}(0, Id_{nd}); \nu_\infty := \mu_\infty \otimes \mathcal{N}(0, Id_d)$

# Dissipation d'entropie cinétique

## Théorème ( $M.A^3$ )

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad \|\mathbb{P}(\mathbf{P}_t, \mathbf{V}_t) - \mathbf{v}^{(n)}\|_{H^1} \leq \alpha e^{-\beta t}. \quad (30)$$

Si de plus  $\nabla^2 V$  est bornée, alors  $\exists C > 0 \quad \exists \xi > 0 \quad \exists \kappa > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0,$

$$\mathbf{H}[\mathbb{P}(\mathbf{P}_t, \mathbf{V}_t) | \mathbf{v}^{(n)}] \leq C \mathbf{H}[\mathbb{P}(\mathbf{P}_0, \mathbf{V}_0) | \mathbf{v}^{(n)}] e^{-\xi t}; \quad (31)$$

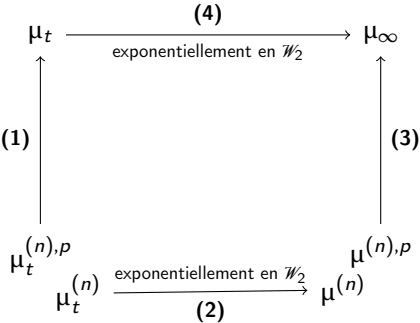
$$\mathcal{W}_2^2(\mathbb{P}(\mathbf{P}_t, \mathbf{V}_t), \mathbf{v}_\infty) \leq \kappa C \mathbf{H}_{CM}(\mathbb{P}(\mathbf{P}_0, \mathbf{V}_0)) e^{-\xi t}. \quad (32)$$

# Diagramme de convergences

**Ergodicité**  
**Inégalité fonctionnelle**  
 $n \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$

**Propagation du chaos**  
 $n \rightarrow \infty, t \text{ fixé}$

**Théorème de Sanov et unicité de  $\mu_\infty$**   
 $t \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$



**Ergodicité**  
**Inégalité Fonctionnelle**  
 $n \text{ fixé}, t \rightarrow \infty$

# Esquisse de preuve

**Flèche (1).** On montre une  $L^2$ -propagation du chaos pour l'interaction polynomiale par couplage synchrone et on propose des conditions explicites sur les potentiels de confinement et d'interaction assurant l'uniformité en temps.

**Flèche (2).**  $\rho_{LS}(\mu^{(n)})\mathbf{H}[\cdot|\mu^{(n)}] \leq 2\mathbf{I}[\cdot|\mu^{(n)}]$  implique

$$\mathbf{H}[\mathbb{P}_{X_t^{(n)}}|\mu^{(n)}] \leq \mathbf{H}[\mathbb{P}_{X_0^{(n)}}|\mu^{(n)}]e^{-2\rho_{LS}(\mu^{(n)})t}; \quad (33)$$

$$\rho_{LS}(\mu^{(n)})\mathcal{W}_2^2(\cdot, \mu^{(n)}) \leq 2\mathbf{H}[\cdot|\mu^{(n)}]. \quad (34)$$

**Flèche (3).** Par un théorème de Sanov sur les U-statistiques (établi par LIU et WU), on montre que l'énergie est une bonne fonction de taux et  $\frac{1}{n}\mathbf{H}[\mathbf{v}^{\otimes n}|\mu^{(n)}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_{CM}(\mathbf{v})$ . La loi des grands nombres nous permet d'avoir la relation entre les informations de Fisher  $\frac{1}{n}\mathbf{I}[\mathbf{v}^{\otimes n}|\mu^{(n)}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{IF}_{CM}(\mathbf{v})$ .

**Flèche (4).**  $\rho_{LS}\mathbf{H}_{CM} \leq 2\mathbf{IF}_{CM}$  et  $\rho_{LS}\mathcal{W}_2^2(\cdot, \mu_\infty) \leq 2\mathbf{H}_{CM}$ .

# Résultats du chapitre 2

# Objectifs

Dynamiques de Langevin de champ moyen et dynamiques de Langevin cinétiques de champ moyen  
Établissement de contractions par couplage synchrone avec un hamiltonien macroscopique général

# Contraction de l'application mesure invariante

## Définitions et hypothèses

$H : \mathcal{P}_{p \geq 0}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  général admettant des dérivées plates du premier et du second ordre conjointement continues,  $\mathcal{C}^2$  en les variables spatiales.

$$\underline{\lambda} := \inf_{(\mu, x)} \lambda_{\nabla \mathcal{D}_m H(\mu, x)} > \|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} < +\infty$$

$$\Phi(\mu)(dx) := \frac{1}{Z_\mu} e^{-\frac{\delta H}{\delta m}(\mu, x)} dx$$

# Contraction de l'application mesure invariante

## Théorème ( $M.A^3$ )

Pour tout  $p \geq 0$ , on a

$$\Phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d). \quad (35)$$

De plus, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\Phi$  définit une contraction stricte de  $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), \mathcal{W}_1)$  :

$$\mathcal{W}_1(\Phi(\mu_0), \Phi(\mu_1)) \leq \frac{\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty}}{\underline{\lambda}} \mathcal{W}_1(\mu_0, \mu_1). \quad (36)$$

Dans ce cas,  $\Phi$  admet au plus un point fixe sur  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$  : si  $p = 1$ , il existe un unique point fixe.

# Esquisse de preuve

$\gamma_t := t\mu_1 + (1-t)\mu_0$ ;  $g_t := -\frac{d}{dt} \frac{\delta H}{\delta m}(\gamma_t, \cdot)$ ;  $\mathcal{L}_{\gamma_t} := \Delta - \nabla \frac{\delta H}{\delta m}(\gamma_t, \cdot) \cdot \nabla$   
générateur infinitésimal auto-adjoint dans  $L^2(\Phi(\gamma_t))$ ;  
 $\mathcal{L}_{\gamma_t} \varphi_t = \varphi - \langle \Phi(\gamma_t), \varphi \rangle$  (équation de Poisson).

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi(\gamma_t), \varphi \rangle = \mathbf{Cov}_{\Phi(\gamma_t)}(\varphi, g_t) \quad (37)$$

Équation de Poisson et mesure invariante	$= \langle \mathcal{L}_{\gamma_t} \varphi_t, g_t \rangle_{L^2(\Phi(\gamma_t))}$	
Identité du générateur et mesure invariante	$= -\langle \nabla \varphi_t, \nabla g_t \rangle_{L^2(\Phi(\gamma_t))}$	
Inégalité de Cauchy-Schwarz et injection	$\leq \ \nabla \varphi_t\ _\infty \ \nabla g_t\ _\infty$ ;	
Norme du processus tangent	$\ \nabla \varphi_t\ _\infty \leq \frac{[\varphi]_1}{\underline{\lambda}}$ ;	(38)
Dualité de Kantorovitch-Rubinstein	$\ \nabla g_t\ _\infty \leq \ \mathcal{D}_m^2 H\ _{op, \infty} \mathcal{W}_1(\mu_0, \mu_1)$ .	(39)

# Contraction en métrique de Wasserstein

## Définitions et hypothèses

$H$  général admettant des dérivées plates du premier et du second ordre conjointement continues et  $\mathcal{C}^2$  en espace.

$$\sup_{\mu} \|\mathcal{D}_m H(\mu, 0)\|_2 < +\infty$$

$$\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} < +\infty$$

$$\exists \lambda \geq 0 \forall (\mu, x, y), \langle \mathcal{D}_m H(\mu, x) - \mathcal{D}_m H(\mu, y), x - y \rangle \geq \lambda \|x - y\|_2^2$$

# Contraction en métrique de Wasserstein

## Théorème ( $M.A^3$ )

Pour toutes solutions  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  de l'équation de Langevin de conditions initiales admettant des moments d'ordre 2, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}_{X_t} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^d); \quad (40)$$

$$\mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{X_t}, \mathbb{P}_{Y_t}) \leq e^{(\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} - \lambda)t} \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{X_0}, \mathbb{P}_{Y_0}). \quad (41)$$

Si  $\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} - \lambda < 0$ , il existe une unique mesure invariante  $\mu_\infty$  et on a contraction exponentielle vers cette dernière :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{X_t}, \mu_\infty) \leq e^{(\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} - \lambda)t} \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{X_0}, \mu_\infty). \quad (42)$$

# Esquisse de preuve

*Rouge*  $\leq -\lambda \|X_t - Y_t\|_2^2$ ; *Bleu*  $\leq \|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op, \infty} \|X_t - Y_t\|_2 \mathbb{E}[\|X_t - Y_t\|_2]$   
(définition dérivée plate et dualité de Kantorovitch-Rubinstein); prendre l'espérance; utiliser l'inégalité de Jensen; conclure avec le lemme de Gronwall et l'existence d'un couplage optimal.

Couplage synchrone :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|X_t - Y_t\|_2^2 &= \left\langle \frac{d}{dt} (X_t - Y_t), X_t - Y_t \right\rangle & (43) \\ &= - \left\langle \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{X_t}, X_t) - \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{Y_t}, Y_t), X_t - Y_t \right\rangle \\ &= - \left\langle \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{Y_t}, X_t) - \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{Y_t}, Y_t), X_t - Y_t \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{X_t}, X_t) - \mathcal{D}_m H(\mathbb{P}_{Y_t}, X_t), X_t - Y_t \right\rangle. \end{aligned}$$

# $L^2$ -propagation du chaos uniforme en temps

Ensuite, on en déduit une  $L^2$ -propagation du chaos uniforme en temps avec

une borne de Fournier-Guillin :  $\delta_d(n) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } d < 4; \\ \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} & \text{si } d = 4; \\ \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}} & \text{si } d > 4; \end{cases}$

$\alpha := 2d + 2 \sup_{\mu} \|\mathcal{D}_m H(\mu, 0)\|_2$  ;  $\beta := 2\lambda - 2 \sup_{\mu} \|\mathcal{D}_m H(\mu, 0)\|_2$  ;  $C(d)$  une constante.

## Théorème ( $M.A^3$ )

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\|X_t^{(n),i} - X_t\|_2^2] \leq \frac{\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op,\infty} C(d)}{2\lambda - 3\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op,\infty}} \left( \left\langle \mathbb{P}_{X_0}, \|\cdot\|_2^2 \right\rangle + \frac{\alpha}{\beta} \right) \delta_d(n). \quad (44)$$

# Contraction en métrique de Wasserstein

## Définitions et hypothèses

$H$  général admettant des dérivées plates du premier et du second ordre conjointement continues et  $\mathcal{C}^2$  en espace.

$$[\mathcal{D}_m H]_{1,\infty} < +\infty$$

$$\|\mathcal{D}_m^2 H\|_{op,\infty} < +\infty$$

$$[A]_1 < +\infty$$

$$\exists \lambda_A \geq 0 \quad \forall (v, w), \langle A(v) - A(w), v - w \rangle \geq \lambda_A \|v - w\|_2^2$$

$$\forall p, B(p) := \lambda_B p + D(p) \text{ avec } \lambda_B \geq 0 \text{ et } [D]_1 < +\infty.$$

# Contraction en métrique de Wasserstein

## Théorème ( $M.A^3$ )

Il existe deux constantes positives  $C$  et  $C'$  telles que pour toutes solutions  $((P_t, V_t))_{t \geq 0}$  et  $((\bar{P}_t, \bar{V}_t))_{t \geq 0}$  de l'équation de Langevin de champ moyen cinétique, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{(P_t, V_t)}, \mathbb{P}_{(\bar{P}_t, \bar{V}_t)}) \leq C' e^{-Ct} \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{(P_0, V_0)}, \mathbb{P}_{(\bar{P}_0, \bar{V}_0)}). \quad (45)$$

De plus, il existe une unique solution stationnaire de loi  $\xi_\infty$  et

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{(P_t, V_t)}, \xi_\infty) \leq C' e^{-Ct} \mathcal{W}_2(\mathbb{P}_{(P_0, V_0)}, \xi_\infty). \quad (46)$$

# Esquisse de preuve

La preuve de cette contraction consiste en un couplage synchrone et un changement de métrique sur l'espace des configurations : on établit un lemme de Gronwall avec une métrique induite par une forme quadratique puis on conclut par équivalence des normes en dimension finie. Cette approche est fondamentale en hypocoercivité.

# $L^2$ -propagation du chaos uniforme en temps

Ensuite, on en déduit une  $L^2$ -propagation du chaos uniforme en temps avec

$$\text{une borne de Fournier-Guillin : } \delta_d(n) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } d < 4; \\ \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} & \text{si } d = 4; \\ \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}} & \text{si } d > 4. \end{cases}$$

## Théorème ( $M.A^3$ )

Il existe une constante positive  $C$  indépendante du nombre de particules telle que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\|P_t^{(n),i} - P_t\|_2^2 + \|V_t^{(n),i} - V_t\|_2^2] \leq C \delta_d(n). \quad (47)$$

La constante  $C$  ne dépend que des coefficients de l'équation et du second moment de la condition initiale.

# Résultats du chapitre 3

# Objectifs

Systèmes dynamiques aléatoires sur un espace d'états abstrait, compact ou non, à temps discret, absorbés et non-linéaires au sens de McKean-Vlasov, c'est-à-dire dont l'évolution à l'instant  $n$  dépend de leur propre loi (conditionnelle) au même instant.

Construction d'un algorithme d'approximation d'une distribution quasi-stationnaire, dans lequel le processus considéré est redistribué suivant sa mesure d'occupation lorsqu'il atteint l'état absorbant.

Propriété de tension sur la suite de probabilités ainsi construite, et le fait que les limites possibles sont des distributions quasi-stationnaires de la dynamique originale (sans hypothèse d'unicité).

# Littérature

**M. Benaïm, B. Cloez, and F. Panloup.** Stochastic approximation of quasi-stationary distributions on compact spaces and applications

**O. Tough and J. Nolen.** The Fleming-Viot process with McKean-Vlasov dynamics

**F. Panloup and J. Reygner.** Asymptotically unbiased approximation of the qsd of diffusion processes with a decreasing time step euler scheme

**M. Benaïm, N. Champagnat, and D. Villemonais.** Stochastic approximation of quasistationary distributions for diffusion processes in a bounded domain

**M. Benaïm and B. Cloez.** A stochastic approximation approach to quasi-stationary distributions on finite spaces

**J.-R. Chazottes, P. Collet, and S. Méléard.** Sharp asymptotics for the quasi-stationary distribution of birth-and-death processes

**P. A. Ferrari, H. Kesten, S. Martinez, and P. Picco.** Existence of quasi-stationary distributions. A renewal dynamical approach

# Dynamique non linéaire absorbée

## Définition

Soit  $(K_{\mu, \partial})_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})}$  une famille de noyaux sous-markoviens sur  $\mathcal{E}$  et soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  la dynamique absorbée associée définie sur  $\mathcal{E} \cup \{\partial\}$  :  $Y_n = \partial$  si  $\tau \leq n$  avec  $\tau$  un temps d'absorption. On note  $\delta_\mu(x) = 1 - K_{\mu, \partial}1(x)$  la probabilité d'absorption.

# QSD au sens de McKean-Vlasov

## Définition et propriété

Une mesure de probabilité  $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$  est appelée une distribution quasi-stationnaire (QSD abréviation en anglais) pour  $(K_{\mu, \delta})_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})}$  si  $Y_0 \sim \nu$  implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_n \in \cdot, \tau > n) = \nu(\cdot) \mathbb{P}(\tau > n). \quad (48)$$

Par une induction, il est aisé de vérifier que sous la QSD,  $\tau$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = \nu K_{\nu, \delta}(\mathcal{E})$ . En particulier,  $\mathbb{P}_\nu(\tau > n) > 0$  pour tout  $n$  et la définition implique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_\nu(Y_n | \tau > n) = \nu. \quad (49)$$

Remarque. On retrouve ainsi les propriétés classiques du cadre markovien. Il est néanmoins important de garder à l'esprit que cette propriété implique également que, sous le régime quasi-stationnaire, la dynamique du processus absorbé est markovienne (puisque à chaque instant  $n$ , la distribution d'interaction est également égale à  $\nu$ ). Ceci est similaire au régime stationnaire (classique) de la dynamique avec interaction, où l'on retrouve la propriété de Markov lorsque le processus part de sa distribution invariante.

# Caractérisation de QSDs de McKean-Vlasov

## Dynamique avec renouvellement

Soit  $(X_n^\mu)$  la chaîne de Markov de noyau

$$\mathbb{K}_\mu(x, \cdot) = K_{\mu, \partial}(x, \cdot) + \delta_\mu(x)\mu(\cdot). \quad (50)$$

Cela signifie que lorsque la particule est absorbée, elle est régénérée par la distribution  $\mu$ . Sous des hypothèses adéquates, il existe une unique mesure invariante  $\Pi_\mu$ .

## Mesure invariante invariante, QSDs et EDO

$\nu$  est une QSD pour  $(Y_n)$  si, et seulement si, elle fixe  $\mu \mapsto \Pi_\mu$ , ce qui est équivalent à chercher les solutions stationnaires de l'EDO :

$$\frac{d}{dt}\nu_t = \Pi_{\nu_t} - \nu_t. \quad (51)$$

# Existence de QSDs de McKean-Vlasov

## Cas compact : hypothèses

$$A_0 : \exists \ell \geq 1, \quad \sup_{x \in \mathcal{E}, \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})} K_{\mu, \partial}^{\ell} 1(x) < 1$$

$$A_1 : \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), K_{\mu, \partial} \text{ Feller ; } \mu \mapsto \mu K_{\mu, \partial} \text{ continue}$$

## Cas non compact : hypothèses

$$A_0 : \exists \ell \geq 1, \quad \sup_{x \in \mathcal{E}, \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})} K_{\mu, \partial}^{\ell} 1(x) < 1$$

$$A_1 : \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), K_{\mu, \partial} \text{ Feller ; } \mu \mapsto \mu K_{\mu, \partial} \text{ continue}$$

$$A_V : \forall \varepsilon > 0 \exists \beta_{\varepsilon} \in \mathbb{R} \exists V_{\varepsilon} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ inf-compacte }^a \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}),$$

$$K_{\mu, \partial} V_{\varepsilon} \leq \varepsilon V_{\varepsilon} + \beta_{\varepsilon}$$

$$\text{Minoration uniforme : } \inf_{\mu} \mu K_{\mu, \partial} 1 > 0$$

a. Une fonction  $V : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  est inf-compacte si pour tout  $r > 0$ ,  $K_r = \{x \in \mathcal{E}, V(x) \leq r\}$  est compacte.

# Existence de QSDs de McKean-Vlasov

Posons (opérateur de Poisson)

$$\mathcal{A}_\mu(x, \cdot) = \sum_{n \geq 0} K_{\mu, \delta}^n(x, \cdot) = (\text{Id} - K_{\mu, \delta}(x, \cdot))^{-1}. \quad (52)$$

Proposition (*M.A<sup>3</sup> + F.P*)

On a

$$\forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad \Pi_\mu = \frac{\mu \mathcal{A}_\mu}{\mu \mathcal{A}_\mu 1} \quad (53)$$

et  $\{v, \Pi_v = v\} \neq \emptyset$ .

## Unicité de la QSD

Nous n'aborderons pas le problème d'unicité qui semble être une question difficile dans ce contexte non linéaire.

# Approximation de QSDs de McKean-Vlasov

## Dynamique auto-attractive

Pour approximer les QSDs de  $(K_{\mu,0})_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})}$ , on introduit le processus auto-attractif  $(X_n, \mu_n)_{n \geq 0}$  défini récursivement sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{E})$  par :  
 $X_0 = x \in \mathcal{E}$ ,  $\mu_0 = \delta_x$  et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \cdot | \mathcal{F}_n) = \mathbb{K}_{\mu_n}(X_n, \cdot) \quad (54)$$

où  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$  et  $\mu_n = \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^n \eta_k \delta_{X_{k-1}}$  est une mesure d'occupation empirique pondérée : les  $\eta_k$  sont supposés être des nombres positifs. Nous supposons également que

$H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \rightarrow +\infty$  et  $\gamma_n := \frac{\eta_n}{H_n}$  décroît vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

# Discrétisation de l'EDO

## Mesure d'occupation empirique pondérée et discrétisation de l'EDO

La suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  satisfait la formule récursive suivante :

$$\mu_{n+1} = \mu_n(1 - \gamma_{n+1}) + \gamma_{n+1} \delta_{X_{n+1}}. \quad (55)$$

L'objectif est de démontrer que les points limites de  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  sont des QSDs de  $(K_{\mu, \delta})_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})}$ . Nous écrivons artificiellement :

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \gamma_{n+1} F(\mu_n) + \gamma_{n+1} \varepsilon_{n+1}, \quad (56)$$

avec  $F(\mu) = -\mu + \Pi_\mu$  et  $\varepsilon_{n+1} = \delta_{X_{n+1}} - \Pi_{\mu_n}$ . Avec cette forme, une QSD est un zéro de  $F$  et l'enjeu est de montrer que  $(\mu_n)$  se comporte asymptotiquement comme une **discrétisation de l'EDO** (ce qui signifie que  $\varepsilon_n$  est asymptotiquement un bruit) et que l'EDO  $\frac{d}{dt} v_t = F(v_t)$  possède des propriétés suffisantes pour assurer les convergences vers ses zéros (la non-linéarité induit de nombreuses difficultés pour ce point).

# Interpolation continue

## Interpolation continue de la mesure d'occupation empirique pondérée

Pour énoncer notre résultat principal, nous devons introduire une version continue interpolée de  $(\mu_n)$ . Soit  $(t_k)_{k \geq 0}$  la suite croissante de nombres positifs définie par :  $t_0 = 0$  et  $t_k = \sum_{m=1}^k \gamma_m$ . Ensuite, nous définissons  $(v_t)_{t \geq 0}$  par

$$\forall s \in [0, \gamma_k], \quad v_{t_{k-1}+s} = \mu_k + \frac{s}{\gamma_k}(\mu_{k+1} - \mu_k). \quad (57)$$

$(v_t)_{t \geq 0}$  est donc presque sûrement un élément de l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathcal{E}))$  des processus continus sur  $\mathbb{R}_+$  de valeurs  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  (pour la topologie faible) et nous considérons la suite décalée associée  $(v^{(n)})_{n \geq 1}$  définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad v_t^{(n)} = v_{t_n+t}. \quad (58)$$

# Résultat principal

## Hypothèses : tension et solution asymptotique

$$\mathbf{A}_0 : \exists \ell \geq 1, \quad \sup_{x \in \mathcal{E}, \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})} K_{\mu, \partial}^{\ell} 1(x) < 1$$

$$\mathbf{A}_1 : \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), K_{\mu, \partial} \text{ Feller}; \mu \mapsto \mu K_{\mu, \partial} \text{ continue}$$

$$\mathbf{A}_2 : \exists C > 0, \sup_{x \in \mathcal{E}} \|K_{\mu, \partial}(x, \cdot) - K_{\nu, \partial}(x, \cdot)\|_{TV} \leq C \|\mu - \nu\|_{TV}$$

$$\mathbf{A}_3 : \exists \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1} \exists \varepsilon > 0 \exists \Psi \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), K_{\mu, \partial}^{\ell}(\cdot, dy) \geq \varepsilon \Psi(dy)$$

**Tension** :  $(\mu_n)$  p.s. tendue sur  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$

**Remarque** :  $\mathbf{A}_3$  est une condition de Doeblin uniforme.

## Hypothèse : stationnarité des limites faibles

$$\mathbf{A}_4 : \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N} \forall \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, \frac{\Psi(K_{\mu_1, \partial} \circ \dots \circ K_{\mu_k, \partial} 1)}{K_{\mu_1, \partial} \circ \dots \circ K_{\mu_k, \partial} 1} \geq c$$

**Remarque** : Dans le cas linéaire,  $\mathbf{A}_4$  assure aussi l'unicité de la QSD contrairement à notre cas.

# Résultat principal

## Théorème ( $M.A^3 + F.P$ )

Sous  $\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}$ , la suite  $(v^{(n)})_{n \geq 1}$  est presque sûrement tendue sur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathcal{E}))$  et toute limite faible de  $(v^{(n)})_{n \geq 1}$  est une solution de l'EDO

$$\frac{dv_t}{dt} = -v_t + \Pi_{v_t}. \quad (59)$$

Si de plus  $\mathbf{A}_4$  est vérifiée, alors toute limite faible de  $(v^{(n)})_{n \geq 1}$  est stationnaire, ce qui implique que toute limite faible de  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  est une QSD  $\nu$  reliée à  $(K_{\mu, \partial})_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})}$ .

# Esquisse de preuve

$$Q_\mu := \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{K}_\mu^n - \Pi_\mu); \quad \varphi - \langle \Pi_\mu, \varphi \rangle = (Id - \mathbb{K}_\mu) Q_\mu \varphi;$$
$$\langle \varepsilon_n, \varphi \rangle = \varphi(X_{n+1}) - \langle \Pi_{\mu_n}, \varphi \rangle = Q_{\mu_n} \varphi(X_{n+1}) - \mathbb{K}_{\mu_n} Q_{\mu_n} \varphi(X_{n+1})$$

La tension de  $(v^{(n)})_{n \geq 1}$  est obtenue par un [théorème d'Ascoli](#). On montre que  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  est asymptotiquement une suite de bruits en l'interprétant comme des [accroissements de martingales](#) via l'opérateur de Poisson  $Q_\mu$  associé à  $\mathbb{K}_\mu$  :

$$\langle \varepsilon_n, \varphi \rangle = \gamma_{n+1} \Delta M_{n+1}(\varphi) + \Delta R_{n+1}(\varphi) + \gamma_{n+1} \Delta D_{n+1}(\varphi). \quad (60)$$

Concernant la stationnarité, on montre que l'EDO a de bonnes [propriétés lipschitziennes](#) relativement à la norme en variations totales.

# Critère de tension

## Hypothèses

$\mathbf{A}_V : \forall \varepsilon > 0 \exists \beta_\varepsilon \in \mathbb{R} \exists V_\varepsilon : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$  inf-compacte<sup>a</sup>  $\forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ,

$$K_{\mu, \partial} V_\varepsilon \leq \varepsilon V_\varepsilon + \beta_\varepsilon$$

**Majoration uniforme proba d'absorption** :  $\sup_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})} \|\delta_\mu\|_\infty < 1$

**Suite de pas de carré sommable** :  $\sum \gamma_n^2 < +\infty$

---

a. Une fonction  $V : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  est inf-compacte si pour tout  $r > 0$ ,  $K_r = \{x \in \mathcal{E}, V(x) \leq r\}$  est compacte.

# Critère de tension

## Théorème ( $M.A^3 + F.P$ )

Il existe une fonction inf-compacte  $\mathcal{V} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\sup_{n \geq 1} \mu_n(\mathcal{V}) < +\infty \quad p.s. \quad (61)$$

En particulier,  $(\mu_n)$  est *p.s.* tendue.

# Schéma d'Euler d'une diffusion de McKean-Vlasov

## Schéma d'Euler d'une diffusion de McKean-Vlasov absorbée

Supposons que  $D$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $h > 0$ . Soit  $(\zeta_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^d$  ou, plus généralement, un processus de Lévy centré donné. On pose également  $\Delta\zeta_{s,t} = \zeta_t - \zeta_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Soit  $\partial$  un point cimetière. Définissons  $\mathcal{E} = \overline{D}$ ,  $Y_0 \sim \mu_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$  et

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + hb(Y_n, \nu_n) + \sigma(Y_n, \nu_n)\Delta\zeta_{nh, (n+1)h} & \text{tant que } \tau > n+1, \\ \partial & \text{si } \tau \leq n+1, \end{cases} \quad (62)$$

où  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}, Y_n + hb(Y_n, \nu_n) + \sigma(Y_n, \nu_n)\Delta\zeta_{nh, (n+1)h} \in \mathcal{E}^c\}$ , et  $\nu_n = \mathcal{L}(Y_n | \tau > n)$ . Si  $\mu_0$  a un support dans  $D$  et que  $\sigma$  n'est pas dégénéré (typiquement uniformément elliptique),  $\tau$  est presque sûrement égal au temps où le schéma quitte  $D$  (et non  $\mathcal{E} = \overline{D}$ ).

# Schéma d'Euler d'une diffusion de McKean-Vlasov

## Noyau du schéma d'Euler d'une diffusion de McKean-Vlasov absorbée

Notons que dans cet exemple,  $K_{\mu,\delta}$  (noté  $K_{\mu,\delta}^{(h)}$ ) est défini par : pour toute fonction mesurable  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$K_{\mu,\delta}^{(h)} f(x) = \mathbb{E}[f(Y_x^h) 1_{Y_x^h \in D}] \quad \text{avec} \quad Y_x^h = x + hb(x, \mu) + \sigma(x, \mu) \Delta \zeta_{0,h}. \quad (63)$$

Ce schéma d'Euler est relié à la diffusion de McKean-Vlasov :

$$\begin{cases} dY_t = b(Y_t, \nu_t) dt + \sigma(Y_t, \nu_t) d\zeta_t \\ \nu_t = \mathcal{L}(Y_t | \tau > t) \end{cases} \quad (64)$$

où  $\tau := \inf\{t \geq 0, Y_t \in D^c\}$ .

# Approximation des QSDs du schéma d'Euler

Hypothèses : tension, solution asymptotique et stationnarité

$\mathbf{L}_{MV}$  :  $x \mapsto b(x, \mu)$  and  $x \mapsto \sigma(x, \mu)$  sont Lipschitz continues sur  $\mathcal{E}$ , uniformément en  $\mu$ ; pour tout  $x \in D$ ,  $b(x, \cdot)$  et  $\sigma(x, \cdot)$  admettent des dérivées plates telles que

$$\sup_{(x, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{E})} \left\| \frac{\delta b(x, \cdot)}{\delta m}(\mu, \cdot) \right\|_{\infty} \vee \left\| \frac{\delta \sigma(x, \cdot)}{\delta m}(\mu, \cdot) \right\|_{\infty} < +\infty; \exists \lambda_0 > 0$$

$\forall (x, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ,  $\sigma \sigma^*(x, \mu) \geq \lambda_0 \text{Id}$ ;  $D$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ;  $\Upsilon_n = \mathbf{o}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ ; pour tout  $h > 0$ ,  $\zeta_h$  admet une densité  $g_h \in \mathcal{C}^1$ .

Hypothèse : approximation des QSDs quand  $h \rightarrow 0$

$\mathbf{B}_{MV}$  :  $(\zeta_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien et

$$\sup_{(x, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{E})} \left[ \frac{\delta b(x, \cdot)}{\delta m}(\mu, \cdot) \right]_1 \vee \left[ \frac{\delta \sigma(x, \cdot)}{\delta m}(\mu, \cdot) \right]_1 < +\infty$$

# Approximation des QSDs du schéma d'Euler

## Proposition (*M.A*<sup>3</sup> + *F.P*)

Sous  $\mathbf{L}_{MV}$ , pour tout  $h > 0$ ,  $(\mu_n^h)_{n \geq 1}$  est tendue sur  $\mathcal{P}(\bar{D})$  et toute limite faible est une QSD  $\nu^h$  pour  $(K_{\mu, \partial}^{(h)})_{\mu \in \mathcal{P}(\bar{D})}$  telle que  $\nu^h(\partial D) = 0$ .

De plus, si  $\mathbf{B}_{MV}$  est vérifiée,  $(\nu^h)_{h > 0}$  est tendue et toute limite faible ( $h \rightarrow 0$ ) est une QSD du processus de McKean-Vlasov absorbé  $(Y_t)$ .

# Cas non compact

**Raison :** Un exemple typique est un schéma de discrétisation de l'équation unidimensionnelle de McKean-Vlasov suivante, absorbée à la sortie de  $D = ]0, +\infty[$  :  
 $dY_t = (-\varphi(Y_t) + \int F(Y_t - y)\mu_t(dy))dt + \sqrt{2}d\zeta_t$ , où  $F$  est supposée être une fonction bornée et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ . La « partie déterministe » satisfera pour tout  $h > 0$  :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - h\varphi(x) + \int F(x - y)\mu(dy) = -\infty$ . Parmi les conséquences, cela impliquera par exemple que  $\delta_\mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

## Schéma d'Euler modifié

$$\bar{K}_{\mu, \delta}^{(h)} f(x) = \mathbb{E}[f(\bar{Y}_x^h) \mathbf{1}_{\bar{Y}_x^h \in D}]; \quad \bar{Y}_x^h = t(x + hb(x, \mu)) + \sigma(x, \mu)\Delta\zeta_{0, h}; \quad t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d);$$
$$\sup_{x, \mu \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{E})} \{ |t(x + hb(x, \mu))| + \|Dt(x + hb(x, \mu))\| \} < +\infty.$$

## Conditions assurant $A_V$

**Schéma d'Euler standard.**  $\zeta_1$  admet des moments de tout ordre ;  $\exists \alpha \geq 0 \exists C \geq 0 \forall (x, \mu)$ ,  
 $x \cdot b(x, \mu) \leq C - \alpha \|x\|^2$  et  $\|b(x, \mu)\|^2 \leq C(1 + \|x\|^2)$  ;  $(x, \mu) \mapsto \sigma(x, \mu)$  est bornée.

**Schéma d'Euler modifié.**  $(x, \mu) \mapsto \sigma(x, \mu)$  est bornée ;  $\exists \alpha > 0, \mathbb{E}[\|\zeta_h\|^\alpha] < +\infty$ .

# Simulations

## Exemple 1.6 (issu d'un article de O. Tough et J. Nolen)

Nous fournissons plusieurs illustrations numériques liées au schéma d'Euler de l'exemple suivant

$$d\xi_t = \gamma \mathbb{E}[\xi_t | \tau_D > t] dt + dB_t, \quad (65)$$

avec  $D = ]-1, 1[$ . Comme  $b(x, \mu) = \gamma \int x \mu(dx)$ ,  $x \mapsto b(x, \mu)$  est constante, donc les QSDs sont explicites :  $\pi_b \propto e^{bx} \cos(\frac{\pi}{2}x)$ , avec  $b$  un point fixe de  $b \mapsto \tanh(\gamma b) - \frac{8\gamma b}{4\gamma^2 b^2 + \pi^2}$ .

Si  $\gamma \leq \frac{\pi^2}{\pi^2 + 8}$ ,  $b = 0$  est l'unique point fixe et la QSD associée est

$$\pi_0 := \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) 1_{[-1,1]}(x).$$

Si  $\gamma > \frac{\pi^2}{\pi^2 + 8}$ , il y a trois points fixes  $b_-, 0, b_+$  avec  $b_- = -b_+$  et on note  $\pi_-, \pi_0$  et  $\pi_+$  les QSDs associées.

# Simulations

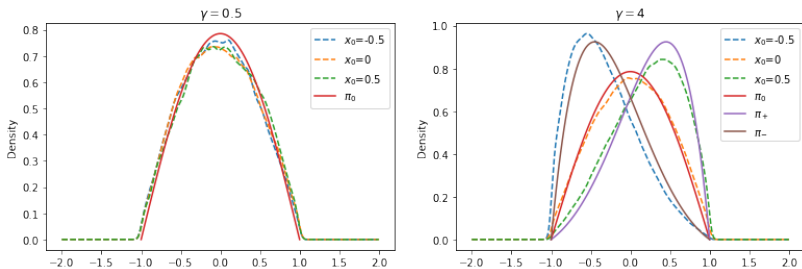


Figure – Gauche.  $(\gamma, h, n) = (0.5, 0.01, 10^5)$ . Droite.  $(\gamma, h, n) = (4, 0.01, 5 \cdot 10^5)$ .

Dans la figure, on compare la vraie densité (lignes continues) et la densité empirique (lignes discontinues). Par densité empirique, nous entendons ici la convolution de  $\mu_n$  avec un noyau gaussien. Pour  $\gamma = 0.5$ , la convergence est maintenue vers l'unique QSD, tandis que pour  $\gamma = 4$ , il est intéressant de noter que les trois QSDs sont des points limites possibles de la suite. Nous avons choisi les points initiaux  $-0.5$ ,  $0$  et  $0.5$  afin d'augmenter la probabilité d'approximation de  $\pi_-$ ,  $\pi_0$  et  $\pi_+$ . Bien sûr, à partir de  $0.5$  par exemple, il existe une probabilité positive que l'algorithme tombe dans le bassin d'attraction de  $\pi_-$  ou  $\pi_0$ . Néanmoins, les trois équilibres étant isolés, il est probable que l'algorithme converge vers l'une des trois QSDs.

# Simulations

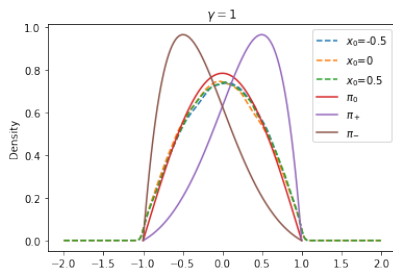


Figure –  $(\gamma, h, n) = (1, 0.01, 10^5)$ .

Pour terminer ces brèves illustrations numériques, considérons le cas  $\gamma = 1$  dans la figure. Dans ce cas, il y a trois QSDs, mais nos simulations suggèrent que seule  $\pi_0$  est attractive.

# Perspectives

# Hard killing

## Convergence de la mesure d'occupation continue

Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  le processus avec interaction et distribution mesure d'occupation (associé à la dynamique auto-attractive) : on considère le processus auto-attractif absorbé  $(A_t)_{t \geq 0}$  tel que  $\forall t < \tau_A$ ,  
 $dA_t = b(A_t, \mu_t^A)dt + \sigma(A_t, \mu_t^A)dB_t$ ;  $\mu_t^A := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{A_s} ds$ ;  
 $\tau_A := \inf\{t \geq 0, A_t \notin D\}$ ; pour tout  $t \geq 0$ , on pose

$$Y_t := \sum_{n=1}^{+\infty} A_{t-s_{n-1}}^{(n)} \mathbb{1}_{[s_{n-1}, s_n)}(t) \quad (66)$$

avec  $s_0 := 0$ ,  $s_n := \sum_{k=1}^n \tau_A^{(k)}$  et  $(A^{(n)})_{n \geq 1}$  une suite de copies indépendantes du processus  $(A_t)_{t \geq 0}$  telle que  $A_0^{(1)} \sim \mu \in \mathcal{P}(D)$  et

$$\forall n \geq 2, A_0^{(n)} \sim \mu_{s_{n-1}}^Y := \frac{1}{s_{n-1}} \int_0^{s_{n-1}} \delta_{Y_s} ds. \quad (67)$$

# Merci de votre attention : je suis tout ouïe :)

 Mohamed Alfaki ABOUBACRINE ASSADEK

On the exponential ergodicity of the McKean-Vlasov SDE depending on a polynomial interaction

<https://hal.science/hal-04110753>

 Mohamed Alfaki ABOUBACRINE ASSADEK

Exponential ergodicity of mean-field Langevin dynamics by synchronous coupling

<https://hal.science/hal-05236513>

 Mohamed Alfaki ABOUBACRINE ASSADEK, Fabien PANLOUP

Quasi-Stationary Distributions of Interacting Dynamical Systems and their approximation

<https://hal.science/hal-05130267>