DM sur la Fonction Mantisse

Mohamed Alfaki Ag Aboubacrine Assadeck
Larema, Angers le 11 Avril 2024

On note $\mathscr{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit la dilatée

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g\Big(\frac{x}{2\pi}\Big) := \frac{x}{2\pi} - \mathbf{E}\Big(\frac{x}{2\pi}\Big) \end{aligned} \tag{1}$$

de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la FONCTION PARTIE DÉCIMALE avec $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la FONCTION PARTIE ENTIÈRE telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in [n, n+1[, \quad \mathbf{E}(x) = n. \tag{2}$$

L'objectif de ce DM est le calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ avec ζ la célèbre FONCTION ZÊTA DE RIEMANN telle que

$$\forall z \in]1, +\infty[, \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}. \tag{3}$$

En effet, un développement en séries de Fourier (lié aux NOMBRES DE BERNOULLI) adéquat permet de calculer les valeurs de la fonction zêta sur les entiers naturels pairs, c'est-à-dire les $\zeta(2k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Quant aux valeurs de ζ sur les entiers naturels impairs, c'est une autre histoire : par exemple, consulter CONSTANTE D'APÉRY pour le calcul de $\zeta(3)$...

Partie I. Calcul de $\zeta(2)$

1) Montrer que $f \in \mathscr{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et calculer les limites à gauche et à droites en ses points de discontinuité.

2) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

3) En appliquant le THÉORÈME DE DIRICHLET, en déduire la somme de la série de Fourier de f.

4) En utilisant l'ÉGALITÉ DE PARSEVAL, en déduire $\zeta(2)$.

Partie II. Calcul de $\zeta(4)$

1) Montrer que $f^2 \in \mathscr{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et calculer les limites à gauche et à droites en ses points de discontinuité.

2) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f^2)$, $a_n(f^2)$ et $b_n(f^2)$.

3) En appliquant le THÉORÈME DE DIRICHLET, en déduire la somme de la série de Fourier de f^2.

4) En évaluant la série de Fourier de f^2 en une discontinuité, retrouver $\zeta(2)$.

5) En utilisant l'ÉGALITÉ DE PARSEVAL, en déduire $\zeta(4)$.

Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier
49045 Angers, Cédex 01
Tél : (33) 02 41 73 54 55
mohamedalfaki.agaboubacrineassadeck@univ-angers.fr