ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2025 – 2026
UNITÉ DE RECHERCHE : Larema
ÉQUIPE : Analyse & Probabilités
MATIÈRE : Algèbre élémentaire L1

NOMBRES COMPLEXES & GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE [1]

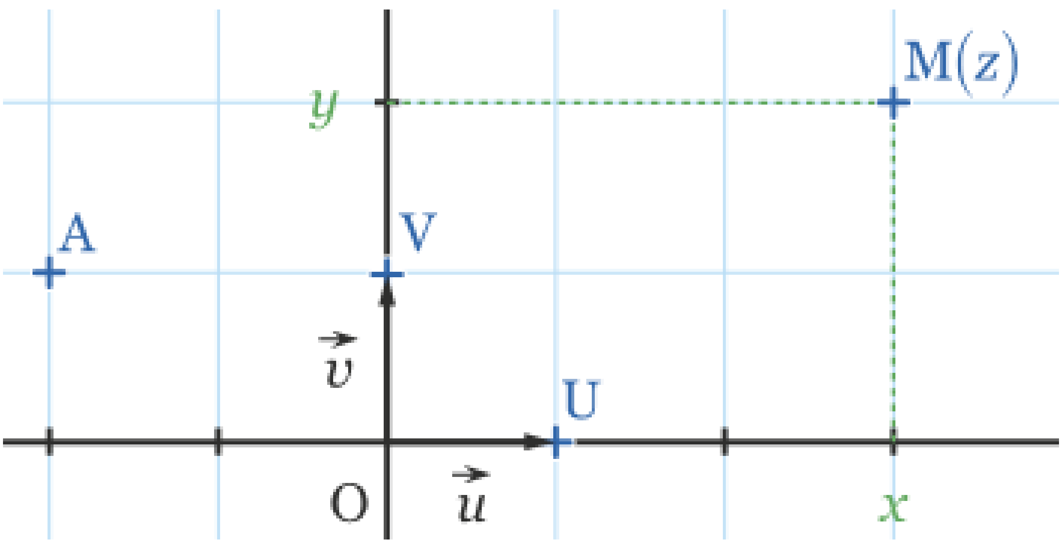
Mohamed Alfaki ABOUBACRINE ASSADEK

TABLE DES MATIÈRES

Le plan est muni d'un *repère orthonormé direct* $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ appelé *plan complexe*.

Définition 0.1 (Repère orthonormé direct). Un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est dit direct si, et seulement si

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]. \tag{0.1}$$



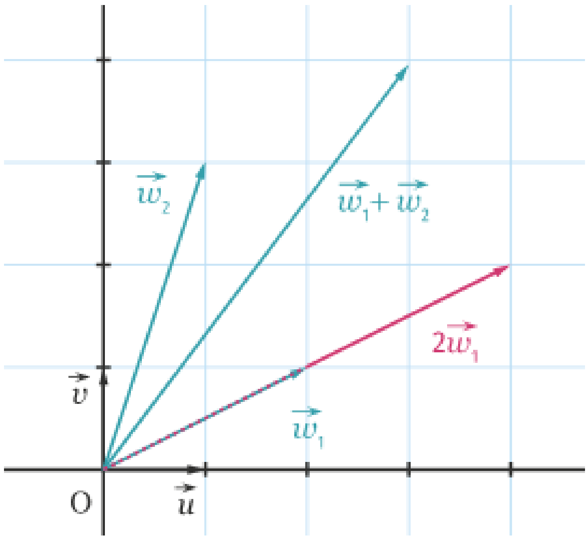
1. Sur le site lelivrescolaire.fr, MATHS EXPERTES est un excellent manuel numérique consultable gratuitement.

1 Du plan complexe aux nombres complexes

1.1 Affixe et nombre complexe

On associe au point V de coordonnées $(0,1)$ un *nombre imaginaire* noté i tel que $i^2 = -1$. Ce nombre est appelé *affixe* du point V. En utilisant la *règle du parallélogramme*, le point $\mathrm{M}(z)$ est défini par l'identité

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z) = x\overrightarrow{\mathrm{OU}} + y\overrightarrow{\mathrm{OV}}. \tag{1.1}$$



Définition 1.1 (Affixe d'un point dans le plan complexe). On appelle affixe de $\mathrm{M}(z)$ de coordonnées (x, y) dans le plan complexe, le *nombre complexe*

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1. \tag{1.2}$$

Le nombre réel x est appelé *partie réelle* de z et le nombre réel y est appelé *partie imaginaire* de z. On appelle l'axe des abscisses l'*axe des réels* (x) et l'axe des ordonnées, l'*axe des imaginaires purs* (iy).

Définition 1.2 (Ensemble des nombres complexes). On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme étant l'ensemble de tous les nombres qui peuvent être obtenus par multiplication et somme à partir des nombres réels et du nombre imaginaire i. Plus précisément, cet ensemble est défini par

$$\mathbb{C} := \left\{ z := x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{1.3}$$

Le nombre imaginaire i est assujetti aux mêmes règles de calcul qu'un nombre réel; par conséquent on obtient les opérations de somme et de multiplication des nombres complexes suivantes.

Proposition 1.1 (Somme et multiplication sur $\mathbb{C}$)**.** *pour tous* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y); \tag{1.4}$$

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx). \tag{1.5}$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.2 (Vecteurs et affixes)**.** *Soient* $\mathrm{M}(z_1)$ *et* $\mathrm{M}(z_2)$ *deux points dans le plan complexe d'affixes* z_1 *et* z_2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z_1) + \lambda\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z_2)$ *a pour affixe* $z_1 + \lambda z_2$. *En particulier,* $\overrightarrow{\mathrm{M}(z_1)\mathrm{M}}(z_2)$ *a pour affixe* $z_2 - z_1$. *On dit que l'application qui associe son affixe à un vecteur du plan complexe est linéaire.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.3 (Égalité de deux nombres complexes)**.** *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On a*

$$a + ib = x + iy \Longleftrightarrow (a = x, \quad b = y). \tag{1.6}$$

Démonstration. Exercice. □

1.2 Motivation : racines de polynômes

On considère le *polynôme du second degré* à coefficients réels

$$\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c, \quad a \neq 0 \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Écrivons l'expression de ce polynôme sous *forme canonique* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= a\Big(\mathrm{X}^2 + \frac{b}{a}\mathrm{X} + \frac{c}{a}\Big) && (1.8)\\
&= a\Big[\Big(\mathrm{X} + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big]\\
&= a\Big[\Big(\mathrm{X} + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta(\mathrm{P})}{4a^2}\Big];\\
\Delta(\mathrm{P}) &:= b^2 - 4ac \quad \textit{le discriminent du polynôme P.} && (1.9)
\end{aligned}$$

Concernant l'*existence de racines réels* pour P, il y a exactement deux cas.

1. **1er cas.** Si $\Delta(\mathrm{P}) \geq 0$, on a deux racines :

$$\mathrm{X}_1 := \frac{-b - \sqrt{\Delta(\mathrm{P})}}{2a}, \quad \mathrm{X}_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta(\mathrm{P})}}{2a}. \tag{1.10}$$

   Notons que si $\Delta(\mathrm{P}) = 0$, on a une *racine double.*
2. **2ème cas.** Si $\Delta(\mathrm{P}) < 0$, il n'y a pas de racines réelles.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, P est aussi un *polynôme à coefficients complexes* et donc , ses racines réelles sont aussi des *racines complexes.* On rappelle que le *nombre de racines d'un polynôme* n'excède pas son degré. Si on voit P comme un polynôme à coefficients complexes, alors P a toujours toutes ses racines dans $\mathbb{C}$. En effet, si $\Delta(\mathrm{P}) < 0$, on a

$$\mathrm{Z}_1 := \frac{-b - i\sqrt{|\Delta(\mathrm{P})|}}{2a}, \quad \mathrm{Z}_2 := \frac{-b + i\sqrt{|\Delta(\mathrm{P})|}}{2a}. \tag{1.11}$$

Cette constatation est un cas particulier d'un résultat plus général appelé *théorème fondamental de l'algèbre* et énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1.1 (D'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.*

On dit que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est *algébriquement clos.* Plus précisément, tout polynôme Q degré $n \geq 1$ à coefficients complexes est un produit de polynômes du premier degré à coefficients complexes :

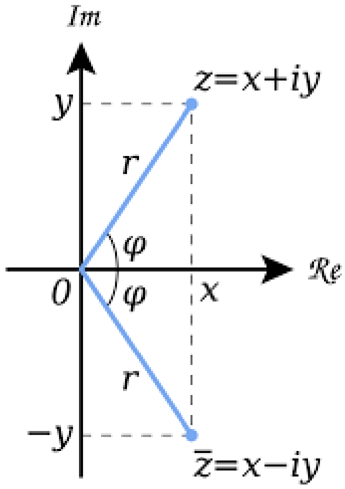
$$\mathrm{Q} = a_n \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{Z} - z_i) \tag{1.12}$$

avec a_n le coefficient dominant de Q et $z_1, \ldots, z_n$ les n racines complexes de Q.

2 Forme algébrique d'un nombre complexe et conjugaison

Définition 2.1 (Forme algébrique). Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle forme algébrique de z son expression sous la forme $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 2.2 (Conjugué d'un nombre complexe). Soit $z := x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z le nombre complexe $\overline{z} := x - iy$: c'est l'affixe du symétrique de $\mathrm{M}(z)$ par rapport à l'axe des réels et parallèlement à l'axe des imaginaires purs.



Proposition 2.1 (Propriétés de la conjugaison complexe). *Soient* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a*

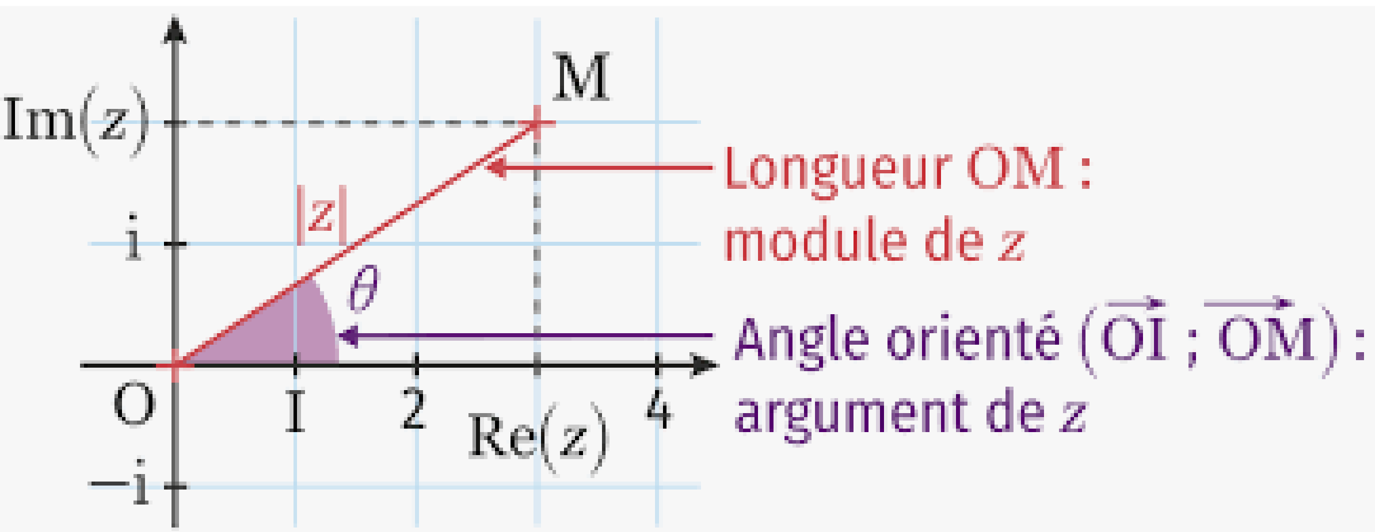
— ***Involution.*** $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
— ***Linéarité.*** $\overline{z_1 + \lambda z_2} = \overline{z_1} + \lambda \overline{z_2}$.
— ***Multiplicativité.*** *Pour tout* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\overline{z_1^n z_2^m} = \overline{z_1}^n \overline{z_1}^m$.
— ***Quotient.*** *si* $z_2 \neq 0$, *pour tout* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\overline{\frac{z_1^n}{z_2^m}} = \frac{\overline{z_1}^n}{\overline{z_2}^m}$.
— ***Parties réelle et imaginaire.*** *Si* $z_1 = x + iy$, *alors* $x = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}$ *et* $y = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$.
— ***Caractérisation.*** $z_1 = z_2 \iff \overline{z_1} = \overline{z_2}$. *En particulier,* $z_1 \in \mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $z_1 = \overline{z_1}$ *; et* $z_1 \in \mathbb{C}$ *si, et seulement si,* $z_1 = -\overline{z_1}$.

Démonstration. Exercice. □

2.1 Module d'un nombre complexe

Définition 2.3 (Module d'un nombre complexe). Soit $z := x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$



Proposition 2.2 (Distance euclidienne et module). *L'application* $z \in \mathbb{C} \mapsto |z|$ *est la version avec les affixes de la norme euclidienne standard dans le plan complexe :*

$$|z| = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.2}$$

En particulier, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, *on a*

— ***Homogénéité.*** $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
— ***Inégalité triangulaire.*** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
— ***Seconde inégalité triangulaire.*** $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
— ***Séparation.*** $|z_1 - z_2| = \iff z_1 = z_2$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.3 (Forme algébrique de l'inverse)**.** *Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ sous forme algébrique : $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a*

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i. \tag{2.3}$$

Démonstration. Exercice. □

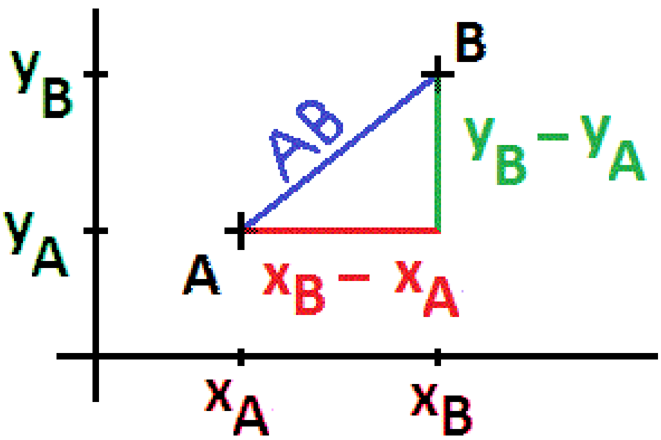
2.2 Orthogonalité et colinéarité

Proposition 2.4 (Produit scalaire et déterminant)**.** *Soient* A *et* B *deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. on a*

$$z_A \overline{z_B} = (x_A x_B + y_A y_B) + i(y_A x_B - x_A y_B) = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle - i\mathbf{det}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}). \tag{2.4}$$

En particulier,
— *si $z_A \overline{z_B} \in i\mathbb{R}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux ;*
— *si $z_A \overline{z_B} \in \mathbb{R}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Exercice. □



3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe et argument

Définition 3.1 (Forme trigonométrique d'un nombre complexe). Soit $z := x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe non nul ($x \neq 0$ ou $y \neq 0$). Il existe $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3.1}$$

On appelle *forme trigonométrique* l'expression de z suivante :

$$z = |z|\Big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\Big). \tag{3.2}$$

$\mathbf{Arg}(z) := \alpha$ est appelé l'*argument principal* et tout autre argument satisfait

$$\mathbf{arg}(z) \equiv \mathbf{Arg}(z)\,[2\pi]. \tag{3.3}$$

En particulier, on n'a clairement pas unicité de la forme trigonométrique.

Proposition 3.1 (Propriétés de l'argument principal)**.** *Soient* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $z_1 \neq 0$ *et* $z_2 \neq 0$.

— ***Produit et puissance.*** *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{Arg}(z_1 z_2^n) = \mathbf{Arg}(z_1) + n\mathbf{Arg}(z_2)$.

— ***Caractérisation.*** $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|, \quad \mathbf{Arg}(z_1) = \mathbf{Arg}(z_2)$. *Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument à* 2π *près.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 3.2 (Argument principal, orthogonalité et colinéarité)**.** *Soient* A *et* B *deux points du plan complexe d'affixes* z_A *et* z_B*. on a*

$$\mathbf{Arg}(z_A \overline{z_B}) = \mathbf{Arg}(z_A) - \mathbf{Arg}(z_B). \tag{3.4}$$

En particulier,

— *si* $\mathbf{Arg}(z_A\overline{z_B}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, *alors les vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont orthogonaux ;*

— *si* $\mathbf{Arg}(z_A\overline{z_B}) \equiv 0[\pi]$, *alors les vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont colinéaires.*

Démonstration. Exercice. □

4 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 4.1 (Exponentielle complexe et forme exponentielle). Pour tout réel α, on définit l'exponentielle imaginaire (ou *exponentielle complexe*) de α par

$$e^{i\alpha} := \cos(\alpha) + i\sin(\alpha). \tag{4.1}$$

De plus, par définition et les *formules d'addition*, on a

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{(\alpha+\beta)i} = e^{\alpha i}e^{\beta i}. \tag{4.2}$$

En particulier, d'après la forme trigonométrique, tout nombre complexe non nul z vérifie

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\mathbf{Arg}(z)}. \tag{4.3}$$

Quant à 0, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 = 0e^{i\alpha}$. Tout nombre complexe z peut donc s'écrire

$$z = |z|e^{\alpha i}, \tag{4.4}$$

expression appelée *forme exponentielle* de z. Et comme pour la forme trigonométrique, on n'a clairement pas unicité de la forme exponentielle.

4.1 Formules d'Euler et théorème de de Moivre

Proposition 4.1 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}; \tag{4.5}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}. \tag{4.6}$$

Démonstration. Exercice. □

Les formules d'Euler sont très importantes : elles interviennent dans la *linéarisation* et la *duplication*. Le résultat central qui illustre ce lien est l'identité de de Moivre (1667-1754) :

Théorème 4.1 (de Moivre)**.** *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n. \tag{4.7}$$

Démonstration. Exercice. □

On rappelle la formule du binôme de Newton qui sert à retrouver des *identités remarquables.*

Théorème 4.2 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. On a*

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \tag{4.8}$$

avec $\binom{n}{k}$ *le coefficient binomial défini par*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! := \prod_{j=1}^{n} j. \tag{4.9}$$

4.2 Racines n-èmes d'un nombre complexe

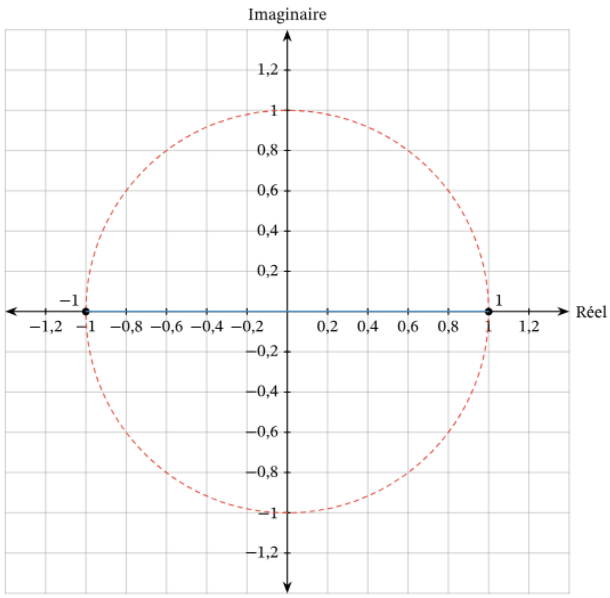
Définition 4.2 (racine n-ème d'un nombre complexe)*.* Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On dit que $\xi \in \mathbb{C}$ est une racine n-ème de z si, et seulement si

$$\xi^n = z. \tag{4.10}$$

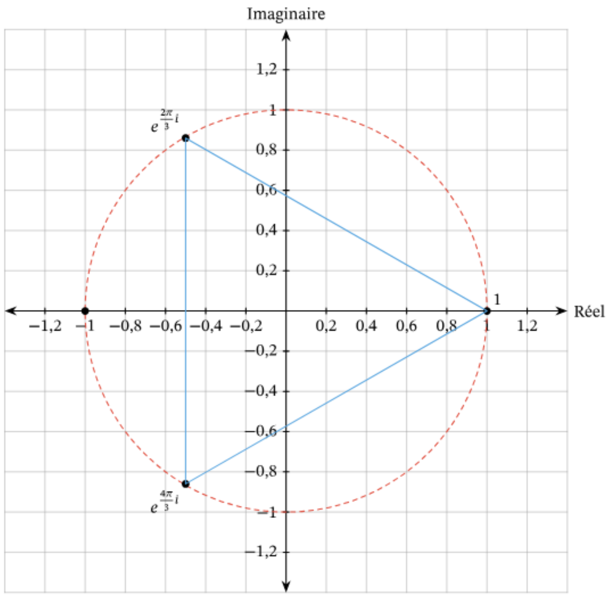
Proposition 4.2 (Caractérisation des racines n-èmes)**.** *Les racines n-èmes de z sont au nombre de n et, dans le plan complexe, toutes divisées par l'une d'elles, sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un des sommets est* 1*. Explicitement, on a*

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \xi_k := |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\mathbf{Arg}(z)+2k\pi}{n} i}. \tag{4.11}$$

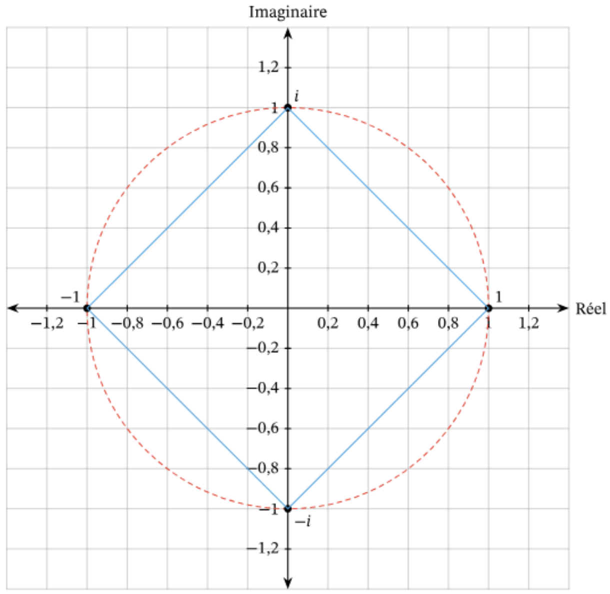
Démonstration. Exercice. □



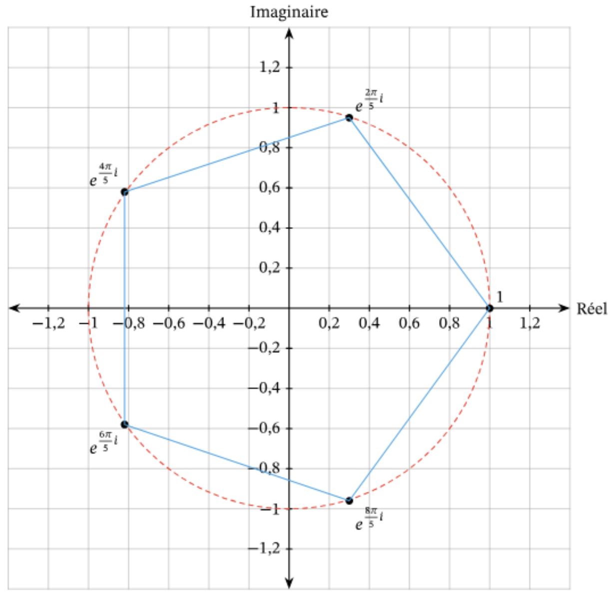
Racines carrées de l'unité



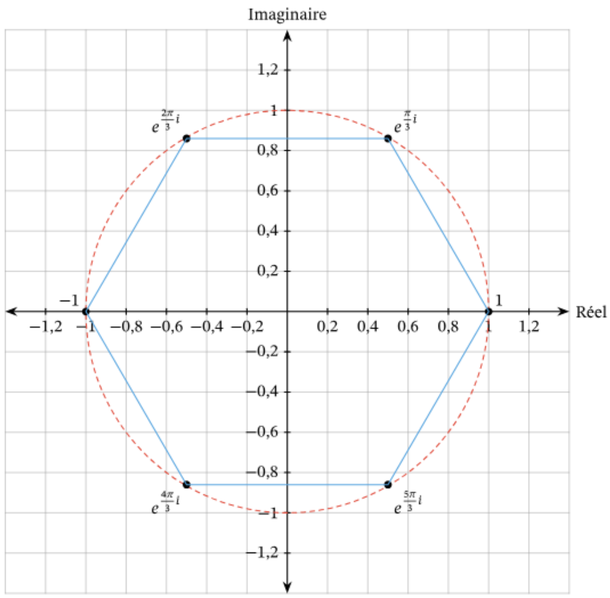
Racines cubiques de l'unité



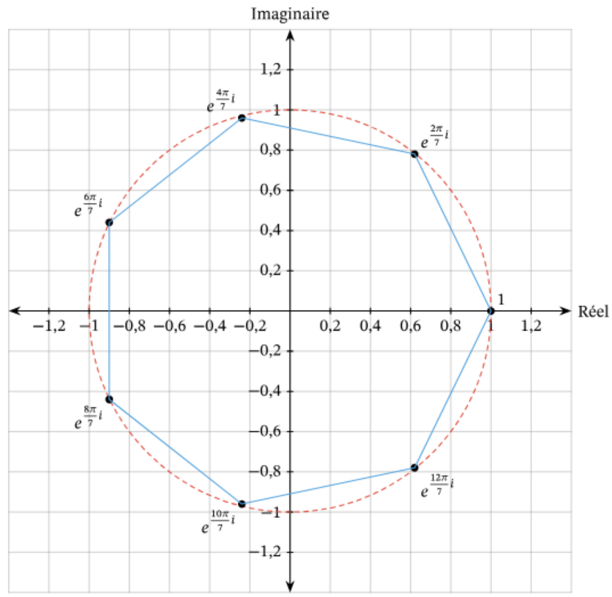
Racines quatrièmes de l'unité



Racines cinquièmes de l'unité



Racines sixièmes de l'unité



Racines septièmes de l'unité

Définition 4.3 (Suite arithmétique). On dit qu'une suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est dite arithmétique si, et seulement si, il existe $r \in \mathbb{C}$ appelé raison de la suite et tel que

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n + r, \tag{4.12}$$

ou de façon équivalente

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{U}_0 + nr. \tag{4.13}$$

Définition 4.4 (Suite géométrique). On dit qu'une suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est dite géométrique si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{C}$ appelé raison de la suite et tel que

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{V}_{n+1} = q\mathrm{V}_n, \tag{4.14}$$

ou de façon équivalente

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0 q^n. \tag{4.15}$$

Proposition 4.3 (Sommes des termes de suites arithmétique et géométrique)**.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{U}_k = \frac{\mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_n}{2}(n+1); \tag{4.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{V}_k = \mathrm{V}_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{4.17}$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 4.4 (Somme des racines n-èmes)**.** *La somme des racines n-èmes de z est nulle :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0. \tag{4.18}$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 4.5 (Produit des racines n-èmes)**.** *Le produit des racines n-èmes de z est donné par*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = z(-1)^{n-1}. \tag{4.19}$$

Démonstration. Exercice. □

Cartes mentales et formulaire de trigonométrie

Carte mentale

Toutes les mesures d'angles et d'arguments sont données à un multiple de 2π près.

NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

Dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point $\mathrm{M}(x\,;y)$ le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$

Le module de z est $|z|=\mathrm{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$

$z\times\overline{z}=|z|^2$; $\mathrm{AB}=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|$

$|z\times z'|=|z|\times|z'|$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z'\neq 0$

Un argument de $z\neq 0$ est $\arg(z)=\alpha=(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$

$\cos(\alpha)=\dfrac{x}{|z|}$; $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{|z|}$

$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)$

Forme trigonométrique :
Pour tout $z\neq 0$,
$z=|z|(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))$

$\cos(\alpha)=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

$\sin(\alpha)=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Forme exponentielle :
Pour tout $z\neq 0$,
$z=|z|e^{i\alpha}$

$\cos(n\alpha)+\mathrm{i}\sin(n\alpha)=(\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha))^n$

Carte mentale

NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

Ensemble $\mathbb{C}$

$\mathrm{i}^2=-1$ et $z\in\mathbb{C}$
$\Leftrightarrow$ il existe deux uniques réels a et b tels que
$z=a+\mathrm{i}b$

Prolongement des propriétés de calcul de $\mathbb{R}$

Formule du binôme :
$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k$

Conjugué d'un nombre complexe : $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$

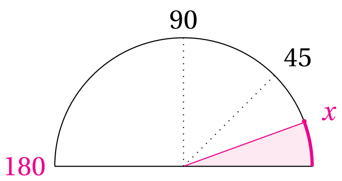
Forme algébrique d'un quotient de nombres complexes

Équations polynomiales

Équation $az^2+bz+c=0$, les racines sont $\dfrac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ si $\Delta=b^2-4ac<0$

Factorisation d'un polynôme par $(z-\alpha)$ lorsque α est une racine

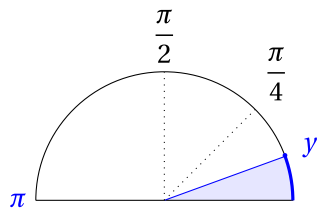
Unités de mesures d'angles



degrés

Conversion :

$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi}$$



radians

NB : θ' et θ sont deux mesures *en radian* du même secteur angulaire $\iff$ $\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

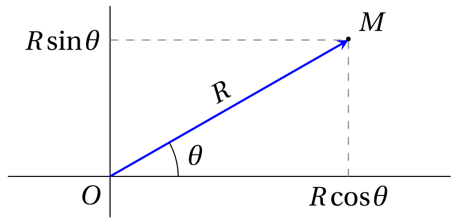
Fonctions trigonométriques et projections

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si $\|\overrightarrow{OM}\| = R$ et $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$ alors :

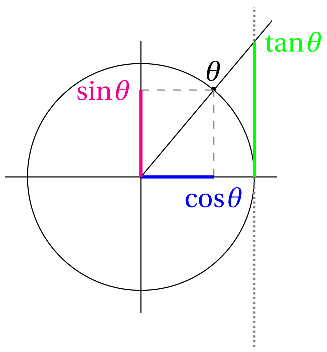
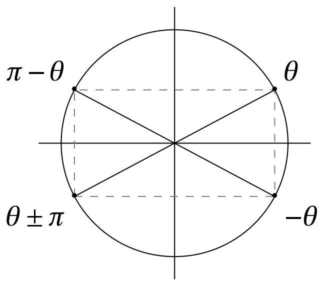
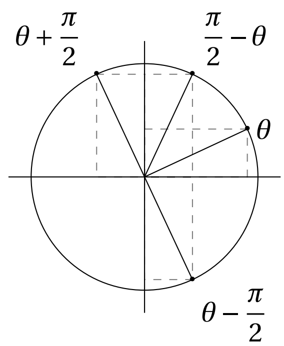
- les coordonnées de M sont $x_M = R\cos\theta$ et $y_M = R\sin\theta$;
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ est la pente de la droite (OM).

En particulier si $R = 1$, d'après Pythagore :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



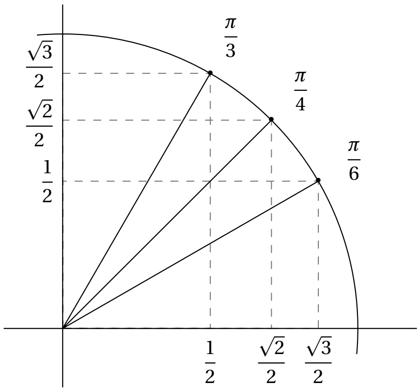
Cercle trigonométrique ($R = 1$), périodicité, symétries

		
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ On a aussi : $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ (parité) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (imparité) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ (imparité) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta$ $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin\theta$	$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$ $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$ $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

En on déduit aussi (faire un dessin) :

- $\cos\theta' = \cos\theta \iff \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin\theta' = \sin\theta \iff \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = \pi - \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan\theta' = \tan\theta \iff \theta' = \theta + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

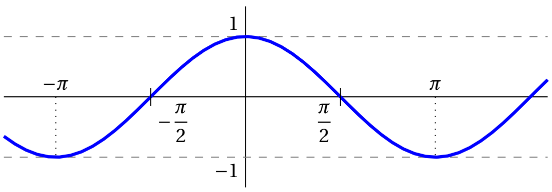
Valeurs remarquables



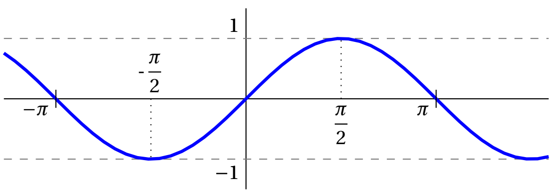
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

NB : Bien d'autres valeurs s'en déduisent par symétrie.
Par exemple $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (faire un dessin) donc $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

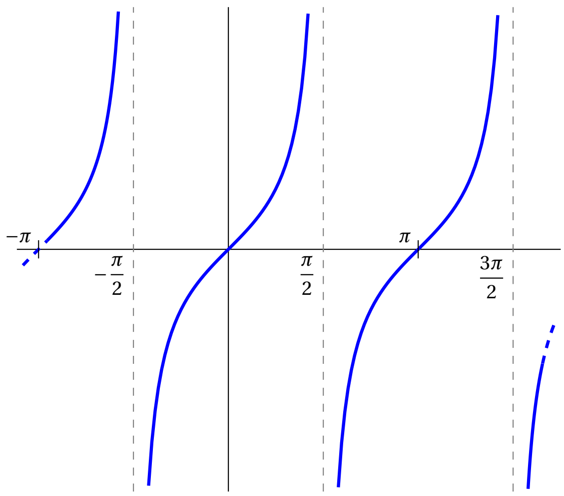
Graphes et dérivées



$(\cos x)' = -\sin x$



$(\sin x)' = \cos x$



$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Quelques formules (parmi beaucoup d'autres...)

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En prenant $a = b$ on obtient les formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

En combinant la formule pour $\cos 2a$ avec Pythagore ($\cos^2 a + \sin^2 a = 1$) on peut en démontrer de nouvelles :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad\qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

En posant $t = \frac{a}{2}$, ces dernières formules peuvent aussi se ré-écrire :

$$1 + \cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} \qquad\qquad 1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$$