

THÉORÈME DE LA BIJECTION MONOTONE ET FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Mohamed Alfaki AG ABOUBACRINE ASSADECK

1 Théorème de la bijection monotone

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, c'est-à-dire un sous-ensemble de la droite réelle d'une des formes : $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $] -\infty, a]$, $] -\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone :

1. Continuité :

$$\forall x_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon). \quad (1)$$

Autrement dit, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$, on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$.

2. Stricte monotonie : stricte croissance

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad (x < y \implies f(x) < f(y)); \quad (2)$$

ou stricte décroissance

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad (x < y \implies f(x) > f(y)). \quad (3)$$

Théorème 1 (de la bijection monotone). *Pour tout réel y strictement compris entre les limites de f aux bornes de I , il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$, autrement dit l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I : f réalise une bijection strictement monotone de I sur son image $J := f(I) := \{f(x), \quad x \in I\}$. En termes de quantificateurs :*

$$\forall y \in J \quad \exists ! x \in I, \quad f(x) = y. \quad (4)$$

Ce qui veut dire que x s'écrit comme fonction de y et on note $x = f^{-1}(y)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} f^{-1} : J &\longrightarrow I \\ y &\longmapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned} \quad (5)$$

appelée bijection réciproque de f entre les intervalles I et J et telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) &:= f^{-1}(f(x)) = x; \\ \forall y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) &:= f(f^{-1}(y)) = y. \end{aligned} \quad (6)$$

De plus, f^{-1} hérite, entre autres, de la stricte monotonie de f .

Remarque 1. Ne pas confondre la bijection réciproque avec l'image réciproque!

Théorème 2 (Bijection monotone dérivable). *Si f est "dérivable sur I " et strictement monotone, alors f^{-1} est dérivable sur $D := \{y \in J, \quad f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$ et*

$$\forall y \in D, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (7)$$

En particulier, si f' ne s'annule jamais, f^{-1} est dérivable sur J .

2 Fonctions hyperboliques

Soient

- $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions réelles;
- $\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires;
- $\mathcal{I} := \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$ le sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

On a $\mathcal{F} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}}\}$: on dit que les deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, autrement dit toute fonction réelle f s'exprime de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$f(x) = \left(\frac{f(x) + f(-x)}{2} \right) + \left(\frac{f(x) - f(-x)}{2} \right). \quad (8)$$

2.1 Définitions

Définition 1 (cosinus hyperbolique). *On appelle cosinus hyperbolique la partie paire de l'application exponentielle :*

$$\begin{aligned} \mathbf{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Définition 2 (sinus hyperbolique). *On appelle sinus hyperbolique la partie impaire de l'application exponentielle :*

$$\begin{aligned} \mathbf{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Définition 3 (tangente hyperbolique). *On appelle tangente hyperbolique l'analogue de la tangente classique :*

$$\begin{aligned} \mathbf{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\mathbf{sh}(x)}{\mathbf{ch}(x)}. \end{aligned} \quad (11)$$

2.2 Trigonométrie hyperbolique

Comme avec les fonctions de la trigonométrie classique, avec les fonctions hyperboliques, on a une relation fondamentale, des formules d'addition, des formules d'angle double, des formules du demi-angle, des formules pour les sommes, différences et produit, etc.

Théorème 3 (relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{ch}^2(x) - \mathbf{sh}^2(x) = 1. \quad (12)$$

Théorème 4 (formule De Moivre hyperbolique).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathbf{ch}(x) + \mathbf{sh}(x))^n = \mathbf{ch}(nx) + \mathbf{sh}(nx). \quad (13)$$

Théorème 5 (formules d'addition hyperbolique). *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\mathbf{ch}(a+b) = \mathbf{ch}(a)\mathbf{ch}(b) + \mathbf{sh}(a)\mathbf{sh}(b); \quad (14)$$

$$\mathbf{ch}(a-b) = \mathbf{ch}(a)\mathbf{ch}(b) - \mathbf{sh}(a)\mathbf{sh}(b); \quad (15)$$

$$\mathbf{sh}(a+b) = \mathbf{ch}(a)\mathbf{sh}(b) + \mathbf{sh}(a)\mathbf{ch}(b); \quad (16)$$

$$\mathbf{sh}(a-b) = \mathbf{ch}(a)\mathbf{sh}(b) - \mathbf{sh}(a)\mathbf{ch}(b); \quad (17)$$

$$\mathbf{th}(a+b) = \frac{\mathbf{th}(a) + \mathbf{th}(b)}{1 + \mathbf{th}(a)\mathbf{th}(b)}; \quad (18)$$

$$\mathbf{th}(a-b) = \frac{\mathbf{th}(a) - \mathbf{th}(b)}{1 - \mathbf{th}(a)\mathbf{th}(b)}. \quad (19)$$

Théorème 6 (formules de l'angle double). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbf{ch}(2x) = \mathbf{ch}^2(x) + \mathbf{sh}^2(x) = 2\mathbf{ch}^2(x) - 1 = 2\mathbf{sh}^2(x) + 1; \quad (20)$$

$$\mathbf{sh}(2x) = 2\mathbf{sh}(x)\mathbf{ch}(x); \quad (21)$$

$$\mathbf{th}(2x) = \frac{2\mathbf{th}(x)}{1 + \mathbf{th}^2(x)}. \quad (22)$$

Théorème 7 (formules du demi-angle). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbf{ch}^2(x) = \frac{1 + \mathbf{ch}(2x)}{2}; \quad (23)$$

$$\mathbf{sh}^2(x) = \frac{\mathbf{ch}(2x) - 1}{2}; \quad (24)$$

$$\mathbf{th}(x) = \frac{\mathbf{sh}(2x)}{1 + \mathbf{ch}(2x)} = \frac{\mathbf{ch}(2x) - 1}{\mathbf{sh}(2x)}. \quad (25)$$

En posant $t = \mathbf{th}(\frac{x}{2})$, on a

$$\mathbf{ch}(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \quad (26)$$

$$\mathbf{sh}(x) = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad (27)$$

$$\mathbf{th}(x) = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (28)$$

Théorème 8 (formules de somme, différence et produit). *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\mathbf{ch}(a) + \mathbf{ch}(b) = 2\mathbf{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathbf{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right); \quad (29)$$

$$\mathbf{ch}(a) - \mathbf{ch}(b) = 2\mathbf{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathbf{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right); \quad (30)$$

$$\mathbf{sh}(a) + \mathbf{sh}(b) = 2\mathbf{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathbf{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right); \quad (31)$$

$$\mathbf{sh}(a) - \mathbf{sh}(b) = 2\mathbf{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathbf{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right); \quad (32)$$

$$\mathbf{th}(a) + \mathbf{th}(b) = \frac{\mathbf{sh}(a+b)}{\mathbf{ch}(a)\mathbf{ch}(b)}; \quad (33)$$

$$\mathbf{th}(a) - \mathbf{th}(b) = \frac{\mathbf{sh}(a-b)}{\mathbf{ch}(a)\mathbf{ch}(b)}. \quad (34)$$

2.3 Dérivées des fonctions hyperboliques et analyse

Par construction, les fonction hyperboliques sont indéfiniment différentiables (elles sont "analytiques"). De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{ch}'(x) = \mathbf{sh}(x); \quad (35)$$

$$\mathbf{sh}'(x) = \mathbf{ch}(x); \quad (36)$$

$$\mathbf{th}'(x) = 1 - \mathbf{th}^2(x) = \frac{1}{\mathbf{ch}^2(x)}. \quad (37)$$

On en déduit que

- \mathbf{ch} est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{ch}(x) \geq \mathbf{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{ch}(x) = +\infty$;
- \mathbf{sh} est strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{sh}(x) = +\infty$;
- \mathbf{th} est strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{th}(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{th}(x) = 1$.

3 Réciproques des fonctions hyperboliques

D'après le théorème de la bijection monotone,

- \mathbf{ch} réalise une bijection strictement croissante entre $[0, +\infty[$ et $[1, +\infty[$ et sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée $\mathbf{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$;
- \mathbf{sh} réalise une bijection strictement croissante entre \mathbb{R} et \mathbb{R} et sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée $\mathbf{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- \mathbf{th} réalise une bijection strictement croissante entre \mathbb{R} et $] -1, 1[$ et sa bijection réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et notée $\mathbf{argth} : \mathbb{R} \rightarrow] -1, 1[$.

De plus, ces bijections sont dérivables et on a

$$\forall y > 1, \quad \mathbf{argch}'(y) = \frac{1}{\mathbf{sh}(\mathbf{argch}(y))} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}; \quad (38)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{argsh}'(y) = \frac{1}{\mathbf{ch}(\mathbf{argsh}(y))} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}; \quad (39)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{argth}'(y) = \frac{1}{1 - \mathbf{th}^2(\mathbf{argth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}. \quad (40)$$

Quant aux expressions explicites de ces bijections, elles sont obtenues en résolvant, pour chaque y , les équations

$$\mathbf{ch}(x) = y; \quad (41)$$

$$\mathbf{sh}(x) = y; \quad (42)$$

$$\mathbf{th}(x) = y. \quad (43)$$

3.1 $\mathbf{ch}(x) = y$

Cette équation est équivalente à $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. En posant, $X = e^x > 0$, on est amené à analyser les racines du polynôme du second degré $X^2 - 2yX + 1$ à savoir $X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Vu que $y \in [1, +\infty[$ et \mathbf{argch} n'est pas bornée, X_2 est la racine recherchée et donc $\mathbf{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

3.2 $\mathbf{sh}(x) = y$

Exercice...

3.3 $\mathbf{th}(x) = y$

Exercice...