Contrôle Continu 2, temps : 2h
Resumé du cours admis, sans autres documents, sans calculette.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 :
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{\sin x}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}-1}{\ln(2+x)-\ln 3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{36}(3x)}{\sin^{35}(4x)}$

Exercice 2 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Prolonger f par continuité en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 :
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad e^x > 1+x$.
Indication : on pourra étudier séparément les cas $x<0$ et $x>0$.

Exercice 4 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f, la convexité et les asymptotes.
3. Montrer que f induit une bijection de l'intervalle $[1;+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
4. Esquisser le graphe de f, tracer les asymptotes.

Exercice 5 :
On rappelle que $x \mapsto \cos(x)$ induit une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$, on note arccos sa fonction réciproque.

1. Calculer $x = \arccos\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $y = \arccos\left(\cos\dfrac{11\pi}{10}\right)$.
2. On admet que $x \mapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$. Soit $x \in]-1;1[$, démontrer que
$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\arccos(x)}{x-1} = -\infty$.
Y a-t-il une tangente à la courbe de la fonction arccos au point $(1, \arccos 1)$?