Contrôle 2 : Algèbre 2020-2021 PEIP2-A 2h00

Question 1 : 20-25 min

Considérons la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A.
2. Donner la décomposition QR de la matrice A.

Question 2 : 20 min

On donne la solution complète de l'équation $Ax = b$ ci-dessous :
(A et b ne sont volontairement pas donnés)

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\forall c, d, e)$$

Un premier étudiant de Peip2 affirme que $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution possible (à $Ax = b$) alors qu'un second étudiant affirme que $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est possible. Selon vous, qui a raison ? L'étudiant 1, l'étudiant 2, les 2 étudiants ou aucun des deux étudiants ? Expliquer.

Question 3 : 20-25 min

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \text{ avec } u(t=0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Question 4 : 30-35 min

Considérons la récurrence suivante

$$u_{k+1} = Au_k = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} u_k \text{ avec } u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la solution u_k en fonction de k. Expliquer votre démarche.
2. Que pouvez vous dire de la limite de u_k lorsque k tend vers ∞ ?

   A partir de maintenant, on s'intéresse à la nouvelle équation récurrente

   $$v_{k+1} = Bv_k = Av_k + \alpha v_k \text{ avec } v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   où α est un paramètre réel. Noter que $B = (A + \alpha I)$.
3. Que pouvez vous dire des valeurs propres et vecteurs propres de B ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de α, la solution v_k converge vers 0 (lorsque $k \to \infty$) ? Expliquer

Question 5 : 15 min

Trois produits de consommation courante A1, A2 et A3 sont en concurrence sur le marché. Au 1er janvier 2021, une enquête réalisée sur un échantillon représentatif de consommateurs a donné les résultats suivants : 30% des personnes interrogées ont déclaré consommer A1, 50% A2 et 20% A3.

Ces valeurs seront notées respectivement p_0, q_0 et r_0.

Les fabricants du produit A1 lancent une campagne publicitaire d'un mois le 1er janvier 2021. Une enquête réalisée le 1er février 2021 sur le même échantillon a donné les résultats suivants :

- parmi les clients de A1 au 1er janvier : 80% continuent d'acheter A1, 10% deviennent acheteurs de A2, 10% deviennent acheteurs de A3;
- parmi les clients de A2 au 1er janvier : 60% continuent d'acheter A2, 30% deviennent acheteurs de A1, 10% deviennent acheteurs de A3;
- parmi les clients de A3 au 1er janvier : 70% continuent d'acheter A3, 20% deviennent acheteurs de A1, 10% deviennent acheteurs de A2.

1. On suppose que la campagne publicitaire continue et que, mois par mois, ses effets restent identiques à ceux du premier mois. On note $u_k = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix}$ l'état du marché après k mois de campagne publicitaire.

   Montrer qu'il existe une matrice A et un vecteur u_0 tels que $u_{k+1} = Au_k$ (Aucun calcul n'est demandé).

Question bonus :

Il s'agit de la suite de la question 5 :

A ne faire que s'il vous reste du temps (car c'est "long" pour peu de points bonus)

Sachant que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,5$ et $\lambda_3 = 0,6$ sont valeurs propres de A, calculer l'état du marché u_k lorsque $k \to \infty$.