Contrôle 1 : Algèbre 2019-2020 PEIP2-A 2h00

Question 1 : 25 min

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la forme échelonnée réduite de la matrice A. En déduire l'espace nul $N(A)$ et l'espace ligne $C(A^T)$.

2. A partir des résultats précédents, décrire géométriquement (demi-droite, plan, droite, cone, hyperplan, ...) $N(A)$ et $C(A^T)$, puis donner les équations cartésiennes de ces espaces (par ex : $x + 2y + 3z = 2$).

3. Calculer la matrice de projection, notée P_N, qui projette sur l'espace nul de A.

4. Donner une relation entre P_N et la matrice de projection, notée P_{C^T}, qui projette sur l'espace ligne de A. En déduire P_{C^T}.

5. Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer Ab et $AP_{C^T}b$. Expliquer vos résultats.

Question 2 : 20 min

Dans cet exercice, nous cherchons la meilleure droite d'équation $y = At + B$ passant par les points de coordonnées $(y = 7, t = -1), (y = 7, t = 1)$ et $(y = 21, t = 2)$.

1. Écrire ce problème sous la forme d'un problème d'algèbre linéaire $Ax = b$. Calculer $N(A^T)$ et en déduire si le système $Ax = b$ admet des solutions.

2. En supposant que b est quelconque et avec la matrice A de la question précédente, que pouvez-vous dire des solutions de l'équation $Ax = b$? (Toujours des solutions ? Pas toujours ? Toujours une unique solution ? Jamais de solution ...)

3. Avec le second membre b de la question 1, calculer l'équation de la meilleure droite (au sens des moindres carrés) passant par les points cités en énoncé.

Question 3 : 15 min

Considérons les 3 vecteurs a, b et c ci-dessous :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer 3 vecteurs orthogonaux v_1, v_2 et v_3 qui engendrent le même espace vectoriel que a, b et c.

2. Montrer que v_1, v_2 et v_3 forment une base de l'espace vectoriel orthogonal à $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 4 : 15 min

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer l'ensemble des solutions de $Ax = b$ et les 4 espaces fondamentaux de A.

Question 5 : 10 min

Parmi les sous espaces ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels (Expliquer/Justifier):

1. L'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$,
2. L'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 0$,
3. L'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 2$.

Question 6 : 15 min

Considérons la matrice A ci-dessous:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de A.
2. Calculer l'inverse de A. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ($A = LU$).

Question 7 : 5 min

Considérons une matrice A de taille $m \times n$ telle que :

L'équation $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet pas de solution et l'équation $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une unique solution.

1. Donner un maximum d'information sur m, n et sur r le rang de A.
2. Déterminer l'espace nul $N(A)$ de la matrice A. Que pouvez-vous en déduire sur les espaces fondamentaux de A ?