

Mathématiques du signal
Deuxième contrôle continu- EI2.
Durée 1h20

L'usage d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.
L'usage du polycopié est autorisé.

Exercice 1. (4pts) **Réponse d'un circuit RC .**

La tension $y(t)$ aux bornes du condensateur, d'un circuit (RC), est régie par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(E) \quad y'(t) + 2y(t) = \sin(t) \text{ pour } t > 0$$

On cherche la réponse causale vérifiant $y(0) = 0$, en appliquant la transformée de Laplace.

Exercice 2. (8=2+4+2 pts) On recherche une fonction causale $t \mapsto x(t)$, vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{2t} \text{ pour } t > 0$$

et les conditions initiales $x(0) = -3$ et $x'(0) = 5$.

On note $X(p)$ la transformée de Laplace de $x(t)$.

1. Écrire la relation vérifiée par $X(p)$, induite par (E).
2. Déterminer $X(p)$ sous forme décomposée en éléments simples sur \mathbb{R} .
3. En déduire, l'originale, la fonction $t \mapsto x(t)$.

Exercice 3. (8=1+4+1+1+1 pts) On considère la fonction 2π -périodique $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $u(t) = t^2$, si $t \in [-\pi, \pi]$.

1. Tracer le graphe de u .
2. Déterminer la série de Fourier de u .
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

4. Calculer l'énergie du signal u .

5. Justifier que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.