Polytech Angers – PeiP2 Jeudi 11 avril 2019

Contrôle continu n° 1 de Calcul numérique

Durée : 2h

Avec documents de cours et TD, accès internet interdit

Toute tentative de connexion internet sera sanctionnée par un 0.

Exercice 1 [15 pts] On considère la fonction $f : I = [0, 1.5] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \cos(2x-1) - \sqrt{x+1}. \tag{1}$$

1. Calculer la primitive g de f telle que $g(0) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sin(1)$. Tracer dans deux sous-figures d'une même figure (1) les graphes de g et f. Ajouter des titres.
2. Démontrer que la fonction g a un unique extremum x^* sur I en faisant appel au théorème des valeurs intermédiaires (et de son corollaire) pour f. Le déterminer à l'aide de la fonction `fsolve` de `Scilab`.
3. Ecrire avec `Scilab` un algorithme de Newton-Raphson sous la forme d'une fonction `xs = NR(x0,kmax)` du nombre d'itérations `kmax` et du point d'initialisation `x0`. Le tester avec `kmax` $= 2$ et `x0` $= 0.5$. Que vaut `xs` ?
4. Adapter la fonction `NR` pour qu'elle admette un vecteur `x0` en entrée. Pour un vecteur `x0` de 10001 valeurs équiréparties entre 0.4 et 1.5, tracer sur une figure (2) le graphe de `xs` ainsi obtenu en fonction de `x0` pour la valeur fixée `kmax` $= 5$. Ajouter un titre.
5. L'algorithme de Newton Raphson peut s'écrire comme une méthode de point fixe $x_{k+1} = F(x_k)$. Expliciter la fonction $F(x)$ en question pour la recherche d'un extremum de g.
6. Tracer les graphes de $F(x)$ et $F'(x)$ sur $[0.4, 1.5]$ dans deux sous-figures d'une même figure (3), avec des titres. Ajouter le tracé de la droite $y = x$ à la sous-figure de $F(x)$. Ajouter les tracés des droites $y = 1$ et $y = -1$ à la sous-figure de $F'(x)$. En déduire graphiquement un intervalle J maximal pour lequel l'algorithme `NR` converge. Justifier.
7. Déterminer quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 naturelles pour l'application directe du théorème des approximations successives à la recherche d'un zéro de f dans l'intervalle I.
8. Tracer dans une même figure (4) les 8 sous figures correspondant à $F_1, F_2, F_3, F_4, F_1', F_2', F_3', F_4'$ sur I, si cela est possible, avec des titres. Ajouter le tracé de la droite $y = x$ aux sous-figures des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4. Ajouter les tracés des droites $y = 1$ et $y = -1$ aux sous-figures des fonctions F_1', F_2', F_3', F_4'. En déduire graphiquement une fonction parmi F_1, F_2, F_3, F_4 et un intervalle maximal $J \subset I$ associé pour lesquels le théorème des approximations successives converge avec l'initialisation $x_0 \in J$.
9. Pour la fonction déterminée au 8., écrire avec `Scilab` l'algorithme de point fixe associé sous la forme d'une fonction `xs = Fix(x0,kmax)` du nombre d'itérations `kmax` et du point d'initialisation `x0`. Le tester avec `kmax` $= 15$ et `x0` $= 0.5$. Tracer dans une même figure (5) les graphes des fonctions `xs = NR(0.5,kmax)` et `xs = Fix(0.5,kmax)` pour `kmax` prenant les valeurs entières 1 à 20. Ajouter des titres. Comparer les deux algorithmes avec la solution du 2. pour `kmax` $= 20$. Conclusion ? *Indication* : écrire une boucle.

Exercice 2 [5 pts]

1. Ecrire -179.6875 dans la norme IEEE754 en 64 bits sous forme hexadécimale.
2. Dans la norme IEEE754 en 34 bits, quel nombre (en base 10) est représenté ci-dessous dans la base hexadécimale ?

$$C45E2000$$