Université d'Angers – ISTIA – EI2
Jeudi 12 avril 2018

Contrôle continu n° 1 de Calcul numérique

Durée : 2h
Avec documents de cours et TD, accès internet interdit
Toute tentative de connexion internet sera sanctionnée par un 0.

Exercice 1 [15 pts] On considère le système différentiel suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}}_{X(0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_0} \tag{1}$$

1. Montrer que (1) équivaut à

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0 \\ y(t) = x'(t) + x(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}. \tag{2}$$

   Résoudre cette équation soit à l'aide de la transformation de Laplace soit à l'aide de la "méthode catalogue".

2. Calculer avec `Scilab` la solution matricielle $X(t) = \exp(tA) X_0$ pour un vecteur t de 1001 valeurs équiréparties entre 0 et 4. Tracer les graphes de $x(t)$ ainsi obtenus (questions 1. et 2.) dans deux sous-figures d'une même figure (1). Ajouter des titres.

3. On considère la fonction :

$$f(t) = -t \exp(-2t) \tag{3}$$

   définie sur l'intervalle $[0, 4]$. Est-elle unimodale ? Justifier. Calculer son minimiseur t^* et le minimum associé $z^* = f(t^*)$. Quel est le rapport avec la question 1 ?

4. Ecrire avec `Scilab` l'algorithme de Newton-Raphson pour f sous la forme d'une fonction `ts = NR(kmax,t0)` du nombre d'itérations `kmax` et du point d'initialisation `t0`. Le tester avec `kmax = 5` et `t0 = 0.9`. Que vaut `ts` ?

5. Adapter la fonction `NR` pour qu'elle admette un vecteur `t0` en entrée. Pour un vecteur `t0` de 10001 valeurs équiréparties entre 0 et 0.9, tracer sur une figure (2) le graphe de `ts` ainsi obtenu en fonction de `t0` pour la valeur fixée `kmax` $= 5$. Ajouter un titre.

6. L'algorithme de Newton Raphson peut s'écrire comme une méthode de point fixe $t_{k+1} = F(t_k)$. Expliciter la fonction $F(t)$ en question pour la recherche d'un minimiseur de f comme défini en (3).

7. Tracer les graphes de $F(t)$ et $F'(t)$ sur $[0, 0.9]$ dans deux sous-figures d'une même figure (3). Limiter l'axe des ordonnées à $[0, 1]$ pour $F(t)$, par exemple à l'aide d'instruction du type `a = gcf(); a.data_bounds = [0,0,0.9,1]`. Limiter de même l'axe des ordonnées à $[-1, 1]$ pour $F'(t)$. En déduire graphiquement un intervalle J pour lequel l'algorithme `NR` converge. Justifier.

8. Déterminer l'intervalle J de la question précédente par le calcul.

9. On considère le vecteur `ts` obtenu à la question 5. Construire le vecteur `t0good` de même dimension que ts tel que `t0good`$(i) = t^*$ si `ts`$(i) \in \left[t^* - 10^{-10}, t^* + 10^{-10}\right]$ et `t0good`$(i) = 0$ sinon. Tracer le graphe de `t0good` en fonction de `t0` en limitant l'axe des ordonnées à $[-0.1, 0.6]$ (voir question 7).

10. Que faut-il changer pour que la question 9 permette de retrouver l'intervalle J des questions 7 et 8 ? Le faire.

Exercice 2 [5 pts]

1. Ecrire -56.25 dans la norme IEEE754 en 32 bits.
2. Dans la norme IEEE754 en 32 bits, quel nombre (en base 10) est représenté ci-dessous ?

$$1100 \quad 0000 \quad 0101 \quad 1110 \quad 1110 \quad 0011 \quad 1101 \quad 0111$$