Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, on considère le point $A(1, -3, -2)$ et deux plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 2x + y - 2z = 5 \text{ et } P_2 : x - 4y - z = 1.$$

1. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
2. Déterminer un vecteur directeur $\vec{\mathbf{v}}$ de la droite $\mathcal{D}$ d'intersection de ces deux plans.
3. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ qui est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et qui passe par A.
4. Déterminer les coordonnées du point B, intersection de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 2. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.
2. Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé :

$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m \end{cases}$$

Exercice 3. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Soient $\mathcal{B}_3 = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4 = (\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2, \vec{\mathbf{f}}_3, \vec{\mathbf{f}}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Exprimer $u(\vec{\mathbf{e}}_1)$, $u(\vec{\mathbf{e}}_2)$ et $u(\vec{\mathbf{e}}_3)$ en fonction de $\vec{\mathbf{f}}_1$, $\vec{\mathbf{f}}_2$, $\vec{\mathbf{f}}_3$ et $\vec{\mathbf{f}}_4$.
3. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$.
4. Montrer que $(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2, u(\vec{\mathbf{e}}_1), u(\vec{\mathbf{e}}_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.