Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, on considère deux plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 2x + 2y - z = 5 \text{ et } P_2 : 3x - 4y = 2.$$

1. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
2. Déterminer un vecteur directeur $\vec{\mathbf{v}}$ de la droite $\mathcal{D}$ d'intersection de ces deux plans.
3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{\mathbf{w}}(1, 1, -3)$ et passant par le point $A(3, 2, -2)$.
   (a) Écrire les coordonnées d'un point quelconque $M_t \in \Delta$ en fonction d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$, ce qui revient à donner un système d'équations paramétriques pour Δ.
   (b) Calculer les distances $d_1(t) = d(M_t, P_1)$ et $d_2(t) = d(M_t, P_2)$ du point M_t aux deux plans P_i.
   (c) Pour quelle valeur du paramètre t les distances $d_1(t)$ et $d_2(t)$ sont-elles égales ? Quelle est cette valeur commune ?
   (d) En déduire que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes. Justifier votre réponse.

Exercice 2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système :

$$\begin{cases} ax & - & 2(a+1)y & = & -1 \\ -x & + & (a+3)y & = & 2 \end{cases}$$

a) n'a pas de solution, b) a une infinité de solutions, c) a une solution unique.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 7y - 2z \\ -2x + 4y - z \\ -3x + 5y - z \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{\mathbf{v}} = g(\vec{\mathbf{u}})$ et $\vec{\mathbf{w}} = g(\vec{\mathbf{v}})$. Calculer $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ et $g(\vec{\mathbf{w}})$.
2. Montrer que $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{w}}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $g \circ g \circ g$ est l'application linéaire nulle, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{R}^3$, $g \circ g \circ g(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$.