Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (*7 points*) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer l'inverse A^{-1} de A.
3. Vérifier le résultat en calculant A^{-1} à partir de la comatrice de A.

Exercice 2. (*6 points*) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x - 7y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

1. Trouver la dimension du noyau et de l'image de f.
2. Donner une base de l'image de f.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3. (*7 points*) Soit $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et considérons l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15x - 11y + 5z \\ 20x - 15y + 8z \\ 8x - 7y + 6z \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. On considère la famille $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ où $\vec{\mathbf{u}}_1 = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + 3\vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = 3\vec{\mathbf{e}}_1 + 4\vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3$, $\vec{\mathbf{u}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_1 + 2\vec{\mathbf{e}}_2 + 2\vec{\mathbf{e}}_3$.
   (a) Vérifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.