Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

de deux façons :

1. en échelonnant la matrice-compagnon ;
2. en calculant la comatrice.

Exercice 2. Soit les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 9-m & 0 & -2 & -6 \\ 14m-7 & m & 2-4m & 6-12m \\ 4 & 0 & -m & -3 \\ 8 & 0 & -2 & -m-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} L_1 - 2L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(N)$ en fonction de $\det(M)$.
2. Calculer $\det(P)$ en fonction de $\det(M)$.
3. Pour quelles valeurs réelles du paramètre m la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et considérons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+4z \\ 3x-4y+12z \\ x-2y+5z \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. On considère la famille $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ où $\vec{\mathbf{u}}_1 = -4\vec{\mathbf{e}}_1 + 3\vec{\mathbf{e}}_2 + 2\vec{\mathbf{e}}_3$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = -4\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_3$, $\vec{\mathbf{u}}_3 = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$.
   (a) Vérifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.