**Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.**

**Le barème est donné à titre indicatif.**

**Exercice 1.** (*5 points*) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{cases}$$

**Exercice 2.** (*5 points*) Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 3.** (*6 points*) On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathbf{v}}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $F$ l'espace vectoriel engendré par $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ et $\vec{\mathbf{v}}_3$ et soit $G$ celui engendré par $\vec{\mathbf{v}}_4$ et $\vec{\mathbf{v}}_5$.

1. Donner une base de $F$ et déterminer la dimension de $F$.
2. Donner une base de $G$ et déterminer la dimension de $G$.
3. Donner une base de $F \cap G$ et déterminer la dimension de $F \cap G$.

**Exercice 4.** (*4 points*) Déterminer (en justifiant la réponse) lesquels des ensembles $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :

1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y - z = x + y = z = 0 \right\}$,
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2 + y^2) = 0 \right\}$.