Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. Déterminer la solution générale du système :

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z - w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 2y + 3z = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base $(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\vec{\mathbf{v}}_1)$ soit une base de F et $(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2)$ soit une base de G.

Exercice 3. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{v}}_3$, $\vec{\mathbf{v}}_4$ et $\vec{\mathbf{v}}_5$ suivants :

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{v}}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la dimension de W et une base de W.