Examen EI2 2h00
Calculatrice autorisée

## Exercice 1 : 20min

Considérons la matrice de projection $P$ suivante :

$$P = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'espace colonnes de la matrice $P$. En déduire l'espace vectoriel sur lequel projette cette matrice $P$.
2. Quelle est la distance entre cet espace vectoriel et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. (Question de cours) Donner, sans calcul, les valeurs propres de $P$. Expliquer.

## Exercice 2 : 10 min MAXI !

1. Trouver la factorisation $QR$ de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rappeler la nom de la matrice $Q$ ainsi que ces propriétés.
3. En déduire $A^{-1}$.

## problème 1 : 30 min

Dans ce problème, nous cherchons le plan d'équation $z = Cx + Dy + E$ qui est le plus proche (au sens des moindres carrés) de ces points :
$x = 1$, $y = 0$ et $z = 1$
$x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$
$x = 0$, $y = 1$ et $z = 5$
$x = 0$, $y = 2$ et $z = 0$

1. Écrire le système d'équations sous la forme $Ax = b$ vérifier par $C, D$ et $E$.
2. Donner les 4 espaces fondamentaux de $A$.
3. Existe t-il une condition sur $b$ pour que $Ax = b$ ait une solution (si oui donner cette condition) ? En déduire s'il existe un plan qui passe par les 4 points précédents.
4. Donner l'équation du meilleur plan (au sens des moindres carrés) le plus proche des 4 points précédents.

TOURNER LA PAGE !

## Problème 2 : 30 min

En 1945, le statisticien Patrick Leslie présente dans une revue scientifique un modèle pour décrire l'évolution temporelle du nombre de femelles dans des populations de souris et de rats.

La prolifération de ces rongeurs était, pendant la seconde guerre mondiale, un réel problème en raison des dégâts occasionnés par ces animaux dans les réserves alimentaires.

Nous allons étudier ce modèle pour les souris femelles dont on sait que chacune d'entre-elles donnent naissance (en moyenne) pendant sa première année a une souris femelle et à huit souris femelles pendant sa deuxième année.
Par ailleurs, la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de 0.25 (soit 25%), et il n'y a aucune chance qu'elle survive au delà de la deuxième année.

On distingue donc 2 catégories de souris : les juvéniles, âgées de moins d'un an, et les adultes, dont l'age est compris entre 1 an et 2 ans. Notons pour tout instant $k$ (supposé entier), $j_k$ le nombre de souris juvéniles, $a_k$ le nombre de souris adultes et $n_k = j_k + a_k$ le nombre total de souris dans la population étudiée.
Les hypothèses du modèle se traduisent par deux équations élémentaires :

$$j_{k+1} = j_k + 8a_k$$

$$a_{k+1} = 0.25j_k$$

En connaissant le nombre de souris juvéniles et adultes au temps initial $k = 0$, on peut en déduire les valeurs de $j_k$ et $a_k$ puis en déduire $n_k$ (pour tout $k$).
Dans la suite, on supposera que $j_0 = 20$ et $a_0 = 0$.

1. Donner la représentation matricielle de ce système d'équations aux différences.
2. Résoudre ce système afin de déterminer l'expression de la population $j_k$ et $a_k$ ($\forall k$).
3. En déduire $n_k$.
4. (bonus) Calculer la limite quand $k$ tend vers l'infini des rapports $\frac{j_k}{n_k}$, $\frac{a_k}{n_k}$ et $\frac{n_{k+1}}{n_k}$. A partir des valeurs trouvées, expliquer la signification concrète de ces limites.

## Problème 3 : 20 min

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $A$ admet une valeur propre $\lambda = -1$ et l'autre valeur propre est racine double de $\det(A - \lambda I) = 0$. Quelles sont les autres valeurs propres de $A$ ?
2. $A$ est-elle diagonalisable ? Justifier (sans forcement diagonaliser $A$).
3. On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + cu(t)$$

avec $c$ un nombre réel quelconque et $u(t = 0)$ la condition initiale.

(a) Pour quelles valeurs de $c$ la solution de l'équation différentielle converge-t-elle vers zéro ?
(b) Pour quelles valeurs de $c$ la solution diverge-t-elle ?
(c) Pour quelles valeurs de $c$ la solution converge-t-elle vers un état stable ?

*Indication :* $\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + cu(t) = (A + cI)u(t)$