Contrôle 1 : Algèbre 2018-2019 EI2 2h00

Question 1 : 15 min

Considérons une matrice A dont la décomposition LU est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 1 \\ 10 & 3 & 13 & 2 \\ -10 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les 4 espaces fondamentaux $C(A)$, $C(A^T)$ $N(A)$ et $N(A^T)$ de la matrice A et donner la décomposition LU de la matrice A.

Question 2 : 5 min

Pour chacune des questions ci-dessous, vous expliquerez brièvement vos réponses.

Considérons un matrice A de taille 3×5 et de rang $r = 3$.

(a) Que pouvez vous dire sur les solutions de l'équation $Ax = b$ (Toujours des solutions ? Pas toujours ? Toujours une unique solution ? Jamais de solution ...)

(b) Décrire géométriquement l'espace colonnes de A ? Idem pour l'espace nul de A.

Question 3 : 25 min

Considérons le plan T dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

1. Donner un vecteur v normal au plan T.

   On note respectivement P_v la matrice de projection sur la droite engendrée par v et P_T la matrice de projection sur le plan T.

2. Calculer la matrice de projection P_v.
3. (Sans calculer P_T) Que pouvez-vous dire de la somme de P_v et P_T ? Expliquer.
4. Déduire de la question précédente la matrice de projection P_T.
5. Donner une matrice A telle que son espace nul $N(A)$ soit le plan T.
6. Considérons le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la projection b_T de b sur le plan T.
7. Calculer $A \cdot b_T$. Expliquer le résultat obtenu !

Question 3 : 20 min

Considérons la matrice A suivante qui dépend d'un coefficient réel c :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des questions ci-dessous, vous pourrez distinguer différents cas en fonction de la valeur de c.

1. Calculer l'espace colonne $C(A)$ de la matrice A.
2. Calculer l'espace nul $N(A)$ de la matrice A.
3. Calculer la solution complète de $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ -c-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 4 : 20 min

Dans cet exercice, on cherche les coefficients α et β de la courbe d'équation $y = \alpha + \beta \cdot 2^t$ qui passent au mieux (au sens des moindres carrés) par les 3 points suivants $(t_1, y_1) = (0, 6)$;$(t_2, y_2) = (1, 4)$;$(t_3, y_3) = (2, 0)$.

1. Donner le système d'équations (de la forme $Ax = b$) qui doit être vérifié par α et β pour que la courbe passe par les 3 points.

2. Calculer les meilleurs coefficients (au sens des moindres carrés) $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de courbe d'équation $y = \alpha + \beta \cdot 2^t$ passe proche des 3 points.

Question 5 : 20 min

Soit A une matrice dont l'espace nul $N(A)$ est engendré par les 3 vecteurs ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une matrice B dont l'espace colonne $C(B)$ est le même que l'espace nul $N(A)$.

2. Considérons maintenant que pour un vecteur b particulier, la solution particulière de l'équation $Ax = b$ est

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Un premier étudiant d'EI2 affirme qu'une solution possible (à l'équation $Ax = b$) est :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors qu'un second étudiant d'EI2 affirme que c'est impossible ! Une seconde solution correcte est :

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Selon vous, qui a raison ? L'étudiant 1, l'étudiant 2 ou bien les 2 étudiants ont raison ? Expliquer.

Question Bonus 6 :(question pas simple !)

Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times m$. Supposons que $AB = I_m$ avec I_m la matrice identité de taille $m \times m$.
Notons r le rang de la matrice A. Laquelle des proposions ci-dessous est vraie (Justifier votre réponse) :

1. $r \geq m$

2. $r \leq m$

3. $r = m$

4. $r > n$

5. autres idées ?