| ÉCOLE D'INGÉNIEURS UNIVERSITÉ D'ANGERS | **Mécanique du point** | **CC1** <br> **2 h** <br> **Sans document, ni calculatrice** |
|---|---|---|

***Questions cours*** ***: Repère de Frenet***

Soit un point matériel mobile M de masse m et soit (Γ) sa trajectoire dans un référentiel R.

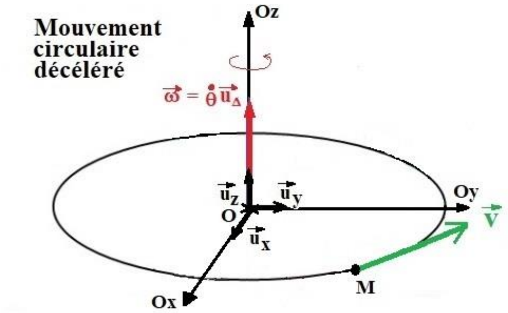
**1)** Définir le **repère de Frenet** $(\mathbf{M}, \vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié au point M, à l'instant t :

- **a)** Définir le plan osculateur P à l'instant t – Définir les deux vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ de ce plan : Direction – Sens – Norme.
- **b)** A quoi est assimilé localement la trajectoire (Γ) de M à l'instant t ? – Définir le centre de courbure C et le rayon de courbure R de (Γ) à t.

**2)** Donner dans la **base de Frenet** $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$**,** les composantes des vecteurs :

- **a)** déplacement élémentaire $\vec{\mathbf{dl}}$ de M en fonction de l'abscisse curviligne s.
- **b)** vitesse instantanée $\vec{\mathbf{V}}$ de M en fonction de V, puis de s.
- **c)** accélération $\vec{\mathbf{a}}$ de M en fonction de V, puis de s.

**3)** En déduire les composantes de la résultante dynamique $\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{ext \to M}}$ (ou somme des forces extérieures) appliquées à M, à l'instant t, dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$.




**Application :** Un point matériel M de masse m = 2 kg, a un **mouvement de rotation uniformément décéléré**. Sa trajectoire circulaire (Γ) de centre O est dans le plan xOy. Le point M tourne autour de l'axe Oz, son vecteur rotation instantanée est noté : $\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{\mathbf{u_z}} = \dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\mathbf{u_z}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mathbf{u_z}}$ .

A l'instant t, M est repéré par ses coordonnées polaires (R, θ).

**1)** Justifier le fait que l'accélération angulaire $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ soit constante et $< \mathbf{0}$ - Donner l'expression de la vitesse angulaire $\omega$ en fonction de $\ddot{\theta}$ et **t** (à $\mathbf{t_0 = 0}$ on prendra $\omega = \omega_0$) – En déduire l'expression de $\theta$ en fonction de $\ddot{\theta}$, $\omega_0$ et **t** (à $\mathbf{t_0 = 0}$ on prendra $\theta_0 = 0$).

**2)** Refaire le schéma ci-contre sur lequel vous représenterez : **R**, $\theta$, les vecteurs du repère polaire $(\overrightarrow{\mathbf{u_r}}, \overrightarrow{\mathbf{u_\theta}})$ lié à M, les vecteurs du repère de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié à M, le vecteur **déplacement élémentaire** $\vec{\mathbf{dl}}$ de M. **(Schéma soigné et lisible).**

**3)** Exprimer dans la base polaire $(\overrightarrow{\mathbf{u_r}}, \overrightarrow{\mathbf{u_\theta}})$, les composantes des vecteurs : $\vec{\tau}$, $\vec{\mathbf{n}}$, puis celles des vecteurs $\vec{\mathbf{dl}}$ et $\vec{\mathbf{V}}$ en fonction de **R** et $\theta$.

**4)** Exprimer dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié à M, les composantes du vecteur **accélération** $\vec{\mathbf{a}}$ de M en fonction de **R** et $\theta$ ainsi que sa norme - Représenter le vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ à l'instant t ainsi que ses deux composantes.

**5)** Exprimer dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié à M, les composantes du vecteur **résultante dynamique** $\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{ext \to M}}$ appliquées à M, à l'instant t, ainsi que sa norme - Représenter le vecteur ainsi que ses deux composantes dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$. Ce vecteur est-il constant ?.

***Exercice 1 :***

Dans le repère R (O, $\overrightarrow{\mathbf{u_x}}, \overrightarrow{\mathbf{u_y}}, \overrightarrow{\mathbf{u_z}}$) orthonormé direct, on considère les deux vecteurs : $\vec{\mathbf{A}} = (0,3,1)$ et $\vec{\mathbf{B}} = (2,1,0)$ .

**1)** Expliciter (sans AN), l'angle entre les deux vecteurs ramenés à la même origine : $\theta = \mathbf{angle}(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}})$

**2)** Expliciter le vecteur $\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ : direction, sens, composantes ainsi que sa norme par deux méthodes différentes.

**3)** Représenter les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{W}}$ ainsi que l'angle θ dans le repère R **(Schéma soigné et lisible)**

***Exercice 2 :***

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel R, muni d'une base cartésienne orthonormée directe ($\overrightarrow{\mathbf{u_x}}, \overrightarrow{\mathbf{u_y}}$). Les coordonnées du point M à l'instant t sont : $\begin{cases} \mathbf{x(t) = t + 1} \\ \mathbf{y(t) = t^2 + 2} \end{cases}$

**1)** Déterminer l'équation et la nature de la **trajectoire (Γ)** de M dans R.

**2)** Exprimer les **coordonnées polaires (ρ, φ)** de M en fonction de ses **coordonnées cartésiennes**, puis en fonction de t.

**3)** Exprimer en fonction de t, les composantes du **vecteur position** $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ de M dans :
**a)** le repère cartésien ; **b)** le repère polaire lié à M ; **c)** sa norme

**4)** Exprimer en fonction de t, les composantes du **vecteur déplacement élémentaire** $\overrightarrow{\mathbf{dl}}$ de M dans :
**a)** le repère cartésien ; **b)** le repère polaire lié à M

**5)** En déduire en fonction de t, les composantes du vecteur **vitesse instantanée** $\overrightarrow{\mathbf{V_{M/R}}}$ de M dans :

**a)** le repère cartésien ; **b)** le repère polaire lié à M ; **c)** le repère de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié à M ; **d)** sa norme

**6)** Exprimer en fonction de t, les composantes du vecteur **accélération** $\overrightarrow{\mathbf{a_{M/R}}}$ de M dans :

**a)** le repère cartésien ; **b)** le repère de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\mathbf{n}})$ lié à M (on notera **R**$_C$ **rayon de courbure** de la **trajectoire (Γ)** à l'instant t ; **c)** sa norme

**7)** En déduire le **rayon de courbure R**$_C$ de la **trajectoire (Γ)** en fonction de t.

**Donnée : (Arctan[u(x)])' =** $\dfrac{\mathbf{u'(x)}}{\mathbf{1 + u^2(x)}}$

# CORRECTION

# CC1 Mécanique point 2018-19

/30

3,5 **QC** 1) Repère Frenet :

a) plan osculateur $\mathcal{P}$ : plan contenant localement la trajectoire $(\Gamma)$ à l'instant $t$

Une base du plan $\mathcal{P}$ est la base de Frenet tq :

1 $\begin{cases} \vec{\tau} : \text{unitaire, tgt à } (\Gamma) \text{, sens du mvt} \\ \vec{n} : \text{unitaire, } \perp \text{ à } \vec{\tau} \text{, orienté vers } C \end{cases}$

centre de courbure $C$ de $(\Gamma)$

b) $(\Gamma)$ est assimilé (à $t$) à un arc de cercle centré en $C$ de rayon $R$

0,5 $C$ : centre de courbure

$CM = R \qquad \vec{MC} = R\vec{n}$

2) Ds base $(\vec{\tau}, \vec{n})$ 0,5

a) $\vec{d\ell} = ds\,\vec{\tau}$ ds abscisse curviligne élémentaire

0,5 b) $\vec{v} = \dfrac{\vec{d\ell}}{dt} = v\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$

0,5 c) $\vec{a} = \dfrac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$

$= \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

3) $\sum \vec{F}_{ext \to M} = m\vec{a}$

0,5 $= \begin{pmatrix} m a_\tau = m\dfrac{dv}{dt} \\ m a_n = m\dfrac{v^2}{R} \end{pmatrix}$ dans $(\vec{\tau}, \vec{n})$

## 3,5 Application

MRUV : mvt de rotation uniformément varié ici décéléré

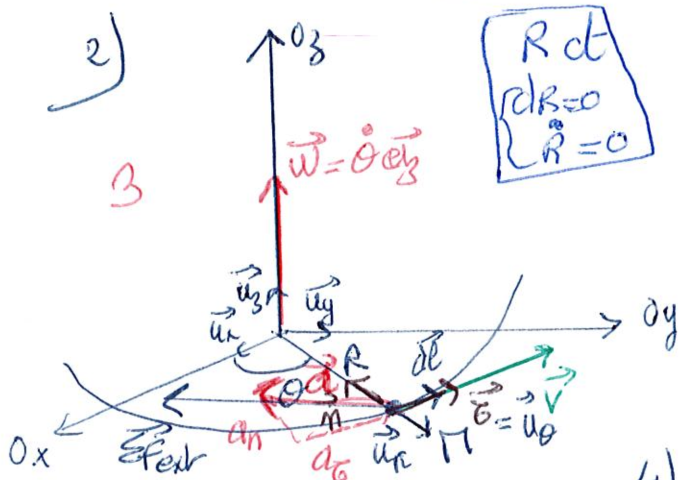
1) $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{u_z}$ décélération angulaire $\ddot{\theta} < 0$

0,5 uniformément décéléré $\Rightarrow$ cte $= \ddot{\theta}$

0,5 • $\ddot{\theta} = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \ddot{\theta}t + \omega_0$ en $rad.s^{-1}$

0,5 • $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \ddot{\theta}t + \omega_0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \omega_0 t \left(+ \underset{0}{\theta_0}\right)$

2)




3

$R$ ct $\begin{cases} dR = 0 \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$

3) Ds base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

0,5 $\vec{OM} = R\vec{u_r} = -R\vec{n}$

$\vec{u_r} = -\vec{n} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_M = \dfrac{d(R\vec{u_r})}{dt} = R\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$= v\vec{\tau}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \end{pmatrix}$ 0,5 $\qquad \vec{\tau}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5

$\vec{d\ell} = d(R\vec{u_r}) = R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{d\ell}\begin{pmatrix} 0 \\ R\,d\theta \end{pmatrix}$ 0,5

4) $\vec{a}$ 1 $\begin{pmatrix} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = R\ddot{\theta} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(R\ddot{\theta})^2 + (R\dot{\theta}^2)^2}$

$= \sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4} = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$ 0,5

1 5) $\sum \vec{F}_{ext \to M} = m\vec{a} = \begin{pmatrix} mR\ddot{\theta} \\ mR\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$ 0,5 $\qquad \|\vec{F}_{ext \to M}\| = mR\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$ 0,5 non ct 0,5

Exercice 1. $\vec{A}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dans $R(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

5

1) 1,5 $\vec{A}\cdot\vec{B} = 3 = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{5}}$

$\theta = \text{Arcos}\frac{3}{\sqrt{50}} = \text{angle}(\vec{A}, \vec{B})$

2) • $\vec{W} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}$

• $\vec{W} \perp$ plan $(\vec{A}, \vec{B})$

2 • sens tq $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{W})$ forme un trièdre direct

+ 3) Schema clair

1,5

• $\|\vec{W}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{41} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$
$= \sqrt{50}\sin\theta$

Exercice 2 $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$

12

1) $(\Gamma)$ trajectoire $y = f(x)$ tq $t = x - 1$

1

$y = (x-1)^2 + 2 = x^2 + 1 - 2x + 2$

$\Rightarrow y = x^2 - 2x + 3$

Trajectoire parabolique plane ds $xOy$

2) • $\rho$ rayon polaire $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(t+1)^2 + (t^2+2)^2}$

1

$\rho = \sqrt{t^2 + 2t + 1 + t^4 + 4 + 4t^2}$

$\rho = \|\vec{OM}\| = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 2t + 5}$

• $\varphi$ angle polaire $\tan\varphi = y/x = \frac{t^2+2}{t+1}$

1

$\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{t^2+2}{t+1}\right)$

3) $\vec{OM}$ vecteur position

a) $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x = t+1 \\ y = t^2 + 2 \end{pmatrix}$ 0,5

b) $\vec{OM} = \begin{pmatrix} \rho = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 2t + 5} \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

c) $\|\vec{OM}\| = \rho = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 2t + 5}$ 0,5

4) $\vec{dl} = d\vec{OM}$ vecteur déplacement élémentaire

a) $\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx = dt \\ dy = 2t\,dt \end{pmatrix}$ 0,5

b) $\vec{dl} = \begin{pmatrix} d\rho = \frac{4t^3 + 10t + 2}{2\sqrt{t^4 + 5t^2 + 2t + 5}}\,dt \\ \rho\,d\varphi = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 2t + 5}\; d\left(\text{Arctan}\frac{t^2+2}{t+1}\right) \end{pmatrix}$ 0,5 d'où $\vec{dl}$ $\begin{cases} d\rho = \dfrac{2t^3+5t+1}{\sqrt{t^4+5t^2+2t+5}}\,dt \\ \rho d\varphi = \sqrt{t^4+5t^2+2t+5} \times \left[\dfrac{2t(t+1)-(t^2+2)}{(t+1)^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{t^2+2}{t+1}\right)^2}\right]dt \end{cases}$

1

$$= \sqrt{t^4+5t^2+2t+5} \times \left[\frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2+(t^2+2)^2}\right]dt$$

$$= \sqrt{t^4+5t^2+2t+5}\left(\frac{t^2+2t-2}{t^4+5t^2+2t+5}\right)dt$$

$$\rho d\varphi = \frac{t^2+2t-2}{\sqrt{t^4+5t^2+2t+5}}\,dt$$

5) $\vec{V}_{M/R} = \dfrac{\vec{dl}}{dt} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$ a) $\vec{V}_M = \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t \end{cases}$ 0,5 b) $\vec{V}_M = \begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{2t^3+5t+1}{\sqrt{t^4+5t^2+2t+5}} \\ \rho\dot{\varphi} = \dfrac{t^2+2t-2}{\sqrt{t^4+5t^2+2t+5}} \end{cases}$ 0,5

c) $\vec{V}_{M/R} = \begin{cases} \dot{s} = \|\vec{V}_M\| = \sqrt{1+4t^2} \\ 0 \end{cases}$ 0,5 d) $\|\vec{V}_{M/R}\| = \sqrt{1+4t^2}$ 0,5

6) $\vec{a}_{M/R} = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \dfrac{d\vec{V}_M}{dt}$ a) $\vec{a}_M = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2 \end{cases}$ 0,5 c) $\|\vec{a}_M\| = 2$ 0,5

b) $\vec{a}_M = \begin{cases} a_\tau = \dfrac{d(\sqrt{1+4t^2})}{dt} = \dfrac{8t}{2\sqrt{1+4t^2}} = \dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ a_n = \dfrac{1+4t^2}{R_c} \end{cases}$ 0,5

$\leftarrow$ Rayon Courbure

7) Rayon de courbure Rc tq

$$\|\vec{a}_M\|^2 = 4 = a_\tau^2 + a_n^2 = \frac{16t^2}{1+4t^2} + \frac{(1+4t^2)^2}{R_c^2}$$

1,5 $\Rightarrow 4 - \dfrac{16t^2}{1+4t^2} = \dfrac{(1+4t^2)^2}{R_c^2} = \dfrac{4(1+4t^2)-16t^2}{1+4t^2}$

$\Rightarrow R_c^2 = \dfrac{(1+4t^2)^3}{4}$ $\qquad R_c = \dfrac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$