ISTIA *EI-1*	**MECANIQUE DU POINT**	**CC1** ***2h*** ***sans document, ni calculatrice***

Exercice 1 (10 points) :

Dans un repère cartésien R (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), la position d'un point M, à l'instant t, est déterminée par les équations horaires :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \\ z = e^{-t} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad t \geq 0$$

1) Dans la base cartésienne orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) :

a) Déterminer les composantes du vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{V_M}$ et son module.

b) Déterminer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ et son module.

c) Déterminer les composantes du vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M : $\vec{\tau}$

d) Déterminer les composantes et le module de la force extérieure résultante qui agit sur ce point M de masse m.

2) Soit M' le point projeté orthogonal de M, à l'instant t sur le plan xOy.

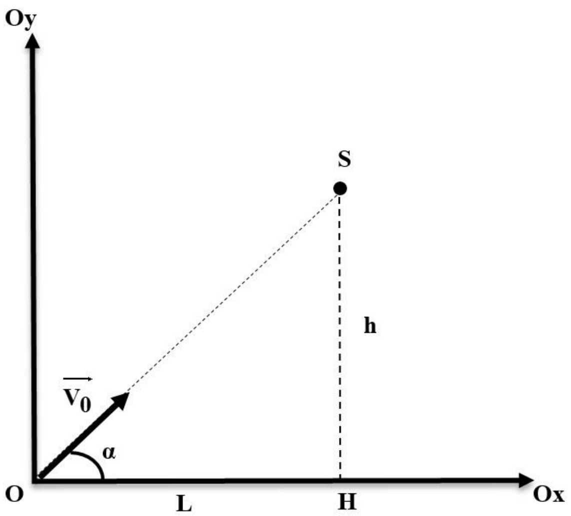
a) Déterminer le rayon polaire ρ(t) et l'angle polaire φ(t), donnant la position de M' à l'instant t.

b) Déterminer à l'instant $t_0 = 0$: ρ(0) et φ(0) puis lorsque $t \to \infty$, les valeurs limites de ρ (t) et φ(t).

c) Conclure sur la trajectoire (Γ') de M'.

Exercice 2 (10 points) :

Au cœur de la jungle, un chasseur muni d'un arc vise un singe S (de masse M) perché dans un arbre. Le chasseur est positionné au centre O du repère orthonormé R (O, $\vec{i}, \vec{j}$) **(Figure 1).**



1) A l'instant $t_0 = 0$, il tire une flèche F (masse m) qui est animée d'une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant l'angle fixe α = $(\mathbf{Ox}, \overrightarrow{\mathbf{OS}})$ avec l'horizontale. Le singe reste immobile dans l'arbre (position S).

a) Etablir les équations horaires de position de la flèche $\overrightarrow{OF}$. On négligera toute résistance de l'air et les frottements fluides.

b) Déterminer le module minimal de $\overrightarrow{V_0}$, en fonction de g, L et α pour que la portée de la flèche soit supérieure à OH=L

c) Montrer que dans ce cas, lorsque la flèche F passe à la verticale du singe S, l'écart entre S et F est : $\dfrac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$

d) Conclure sur la possibilité pour le chasseur de tuer le singe, si celui reste immobile lorsqu'il est visé.

2) A l'instant $t_0 = 0$, le chasseur tire la flèche F avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant l'angle fixe α = $(\mathbf{Ox}, \overrightarrow{\mathbf{OS}})$ mais le singe ayant pris peur, se laisse tomber à l'instant exact où il voit la flèche quitter l'arc.

a) Etablir les équations horaires de position du singe $\overrightarrow{OS}$

b) Montrer que dans ce cas, le singe sera touché par la flèche.

Exercice 3 (Bonus 3 points) :

La loi horaire du mouvement d'un point M est donnée par son abscisse curviligne $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ **(a et V_0 constantes positives).**

1) Déterminer $\dot{s}(t)$

2) En déduire les expressions de $\left\|\overrightarrow{V_M}\right\|$ et de $ds = \left\|\overrightarrow{dl}\right\|$ à l'instant t.

CORRECTION

ISTIA EI-1	MECANIQUE DU POINT	CC1 2h sans document, ni calculatrice

Exercice 1 (10 points) :

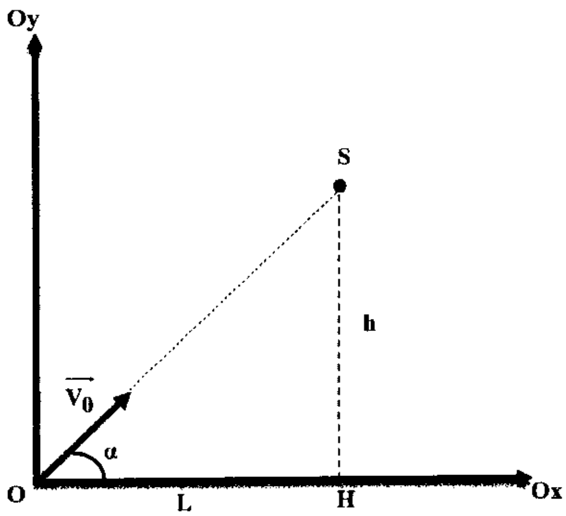
Dans un repère cartésien R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position d'un point M, à l'instant t, est déterminée par les équations horaires :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \\ z = e^{-t} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad t \geq 0$$

1) Dans la base cartésienne orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
   - a) Déterminer les composantes du vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{V_M}$ et son module.
   - b) Déterminer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ et son module.
   - c) Déterminer les composantes du vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M : $\vec{\tau}$
   - d) Déterminer les composantes et le module de la force extérieure résultante qui agit sur ce point M de masse m.
2) Soit M' le point projeté orthogonal de M, à l'instant t sur le plan xOy.
   - a) Déterminer le rayon polaire $\rho(t)$ et l'angle polaire $\varphi(t)$, donnant la position de M' à l'instant t.
   - b) Déterminer à l'instant $t_0 = 0$: $\rho(0)$ et $\varphi(0)$ puis lorsque $t \to \infty$, les valeurs limites de $\rho(t)$ et $\varphi(t)$.
   - c) Conclure sur la trajectoire (Γ') de M'.

Exercice 2 (10 points) :

Au cœur de la jungle, un chasseur muni d'un arc vise un singe S (de masse M) perché dans un arbre. Le chasseur est positionné au centre O du repère orthonormé R $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **(Figure 1)**.



1) A l'instant $t_0 = 0$, il tire une flèche F (masse m) qui est animée d'une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant l'angle fixe $\alpha = (\mathbf{Ox}, \overrightarrow{\mathbf{OS}})$ avec l'horizontale. Le singe reste immobile dans l'arbre (position S).

a) Etablir les équations horaires de position de la flèche $\overrightarrow{OF}$. On négligera toute résistance de l'air et les frottements fluides.

b) Déterminer le module minimal de $\overrightarrow{V_0}$, en fonction de g, L et α pour que la portée de la flèche soit supérieure à OH=L

c) Montrer que dans ce cas, lorsque la flèche F passe à la verticale du singe S, l'écart entre S et F est : $\dfrac{gL^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$

d) Conclure sur la possibilité pour le chasseur de tuer le singe, si celui reste immobile lorsqu'il est visé.

2) A l'instant $t_0 = 0$, le chasseur tire la flèche F avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant l'angle fixe $\alpha = (\mathbf{Ox}, \overrightarrow{\mathbf{OS}})$ mais le singe ayant pris peur, se laisse tomber à l'instant exact où il voit la flèche quitter l'arc.
   - a) Etablir les équations horaires de position du singe $\overrightarrow{OS}$
   - b) Montrer que dans ce cas, le singe sera touché par la flèche.

Exercice 3 (Bonus 3 points) :

La loi horaire du mouvement d'un point M est donnée par son abscisse curviligne $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ (**a et V_0 constantes positives**).

1) Déterminer $\dot{s}(t)$
2) En déduire les expressions de $\left\|\overrightarrow{V_M}\right\|$ et de $ds = \left\|\overrightarrow{dl}\right\|$ à l'instant t.

CC1 Mécanique du point

10 **Exercice 1**

Ds repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{OM} \begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \\ z = e^{-t} \end{cases}$ $t \geq 0$

1) a) $\vec{V_M} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = \\ \dot{y} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = \\ \dot{z} = -e^{-t} = \end{cases} \boxed{\begin{matrix} -e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ -e^{-t} \end{matrix}}$

2 $\|\vec{V_M}\| = e^{-t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1} = e^{-t}\sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1}$

$= \underline{\sqrt{3}\, e^{-t}}$

b) $\vec{a_M} = \frac{d\vec{V_M}}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{-t}(-\sin t + \cos t) = \\ \ddot{y} = -e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t) = \\ \ddot{z} = e^{-t} = \end{cases} \boxed{\begin{matrix} 2e^{-t}\sin t \\ -2e^{-t}\cos t \\ e^{-t} \end{matrix}}$

2 $\|\vec{a_M}\| = e^{-t}\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \underline{e^{-t}\sqrt{5}}$

c) $\vec{V_M} = \|\vec{V_M}\|\vec{\tau}$ $\quad$ $\vec{\tau}$ unitaire et tangent à la trajectoire (Γ) de M

1 $\vec{\tau} = \frac{1}{\|\vec{V_M}\|}\vec{V_M} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -(\cos t + \sin t) \\ \cos t - \sin t \\ -1 \end{pmatrix}}$

1 d) $\vec{R}_{ext \to M} = \sum \vec{F}_{ext \to M} = m\vec{a_M} = \boxed{\begin{pmatrix} 2me^{-t}\sin t \\ -2me^{-t}\cos t \\ me^{-t} \end{pmatrix}}$ $\quad \|\vec{R}\| = \sqrt{5}\, me^{-t}$

2) M' projeté orthogonal de M sur xOy $\quad M(\rho, \varphi)$

a) $\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \boxed{e^{-t}} & \text{rayon polaire } (\rho = \|\vec{OM'}\|) \\ \varphi(t) = \text{Arctan}\, y/x = \text{Arctan}(\tan t) \boxed{= t} & \text{angle polaire } \varphi = (\widehat{Ox, \vec{OM'}}) \end{cases}$

2

b) • $t_0 = 0$ $\quad \rho(t_0) = 1$ et $\varphi(t_0) = 0$ $\quad M'_0$ sur Ox $\quad \|\vec{OM'_0}\| = 1$

• $t \to +\infty$ $\quad \rho(t) \to 0$ et $\varphi(t) \to +\infty$

2 (Γ') est une spirale, M' se rapproche du point O en tournant dans le plan xOy

1

10 Exercice 2

1) a) Flèche F : $m\vec{a}_F = \sum \vec{F}_{ext \to F} = \vec{P}_F = m\vec{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}} = \frac{d\vec{V}_F}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_F = \begin{pmatrix} cte \\ -gt + cte \end{pmatrix} \quad \text{or à } t_0 = 0 \quad \vec{V}_0 \begin{pmatrix} V_0 \cos\alpha \\ V_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_F = \begin{pmatrix} V_0 \cos\alpha \\ -gt + V_0 \sin\alpha \end{pmatrix}} = \frac{d\vec{OF}}{dt}$$

2 $$\Rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} V_0 \cos\alpha\, t + cte \\ -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha\, t + cte \end{pmatrix} \quad \text{or à } t_0 = 0 \quad \vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OF} = \begin{pmatrix} V_0 \cos\alpha\, t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha\, t \end{pmatrix}}$$

b) Portée de F $\quad P \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2}g t_P^2 + V_0 \sin\alpha\, t_P = 0$

$$\Rightarrow t_P = 0 \text{ en O} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}g t_P + V_0 \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{t_P = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}}$$

2 $$\Rightarrow \vec{OP} \begin{pmatrix} \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_P > OH = L \Rightarrow \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} > L \Rightarrow \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}}}$$

c) Lorsque la flèche F passe à la verticale du singe S

$$x_F = L \Rightarrow V_0 \cos\alpha\, t = L \Rightarrow \boxed{t = \frac{L}{V_0 \cos\alpha}}$$

$$\Rightarrow y_F = -\frac{1}{2} g \frac{L^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\, L$$

2 L'écart entre S et F est : $h - \left(-\frac{1}{2} g \frac{L^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\, L \right)$

Ecart : $h + \frac{1}{2} g \frac{L^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} - \tan\alpha\, L \quad$ or $\boxed{\tan\alpha = \frac{h}{L}}$

d'où $\boxed{\text{écart} : \frac{gL^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}}$

1 d) L'écart n'est jamais nul $L \neq 0$ donc le singe ne peut pas être touché

2

2) a) Singe S : $m\vec{a_s} = \sum \vec{F}_{ext \to S} = \vec{P_s} = M\vec{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}} = \frac{d\vec{V_s}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V_s} = \begin{pmatrix} cte \\ -gt + cte \end{pmatrix}$$ or à $t_0 = 0$ $\vec{V_{s_0}} = \vec{0}$ car se laisse tomber

1.5

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}} = \frac{d\vec{OS}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} cte \\ -\frac{1}{2}gt^2 + cte \end{pmatrix}$$ or à $t_0 = 0$ $\vec{OS_0} = \begin{pmatrix} L \\ h \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OS} = \begin{pmatrix} L \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix}}$$

b) La flèche F passe à la verticale du singe S à $t = \frac{L}{V_0 \cos\alpha}$, dans ce cas $\boxed{\vec{OS} = \begin{pmatrix} L \\ -\frac{1}{2}g\frac{L^2}{V_0^2\cos^2\alpha} + h \end{pmatrix}}$

1.5 et $\boxed{y_S = y_F}$ le singe sera touché

③ Exercice 3

M : $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ a et V_0 ctes positives

1.5 1) $\dot{s}(t) = \|\vec{V_M}\| = \frac{ds(t)}{dt} = at + V_0$

1.5 2) Expression $\|\vec{V_M}\| = at + V_0$ (>0)

$$ds = \|d\vec{l}\| = (at + V_0)\,dt$$