ISTIA

Ecole d'Ingénieurs de l'Université d'Angers

Année : EI1

Contrôle continu de Probabilités et Statistiques
Téodor TIPLICA, Jean-Claude JOLLY, Laurent SAINTIS

Date : 15/05/17 Durée : 1H20 Documents autorisés : Non

Les deux exercices de l'énoncé peuvent être traités indépendamment.

Exercice 1 (8 points) :

On lance deux dés discernables équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère les variables aléatoires X et Y respectivement égales au plus petit et au plus grand numéro obtenu.

1) Déterminer la loi du couple (X,Y), les lois marginales, l'espérance mathématique de X et de Y.
2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z=Y-X.

Exercice 2 (12 points) :

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité jointe :

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a(1-x)y & si \quad (x,y) \in A \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

où : A est le triangle de sommets $(0,0), (1,1), (0,1)$.

1) Déterminer a.
2) Calculer les densités de probabilité marginales de X et de Y.
3) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
4) Calculer $P\left(\frac{2}{3}Y \leq X \leq \frac{4}{5}Y\right)$.

Remarque :
On féra un schéma pour expliquer le choix de bornes dans l'intégrale double.

Indication :
Le choix de l'ordre d'intégration dans l'intégrale double est important !

Feuille de formules

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

$E[X] = \sum x_i P(X = x_i)$

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

$P[(X,Y) \subset D] = \iint_D f_{XY}(x,y)dxdy$

$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$

$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$

$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx}$

$f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy}$