ISTIA EI-1	**Mécanique du solide**	**CC2** **2h** **Sans document** **Sans calculette**

Exercice 1: Planche de Timochenko

Une planche mince et homogène, de masse m, de longueur 4ℓ, repose sur deux cylindres identiques, de rayon r, tournant en sens inverses à vitesse angulaire constante ω. Á l'instant initial, la planche est abandonnée sans vitesse, son centre d'inertie G étant situé à une distance x_0 de l'origine O d'un référentiel R $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ galiléen.

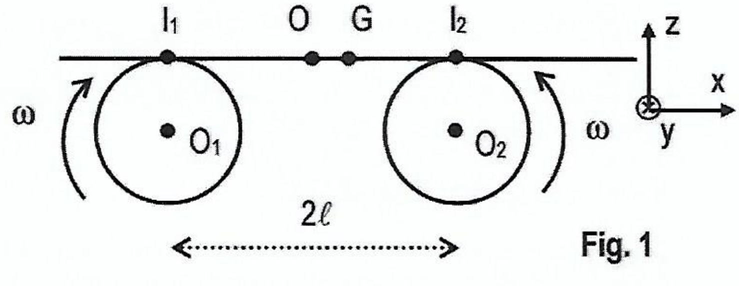


Fig. 1

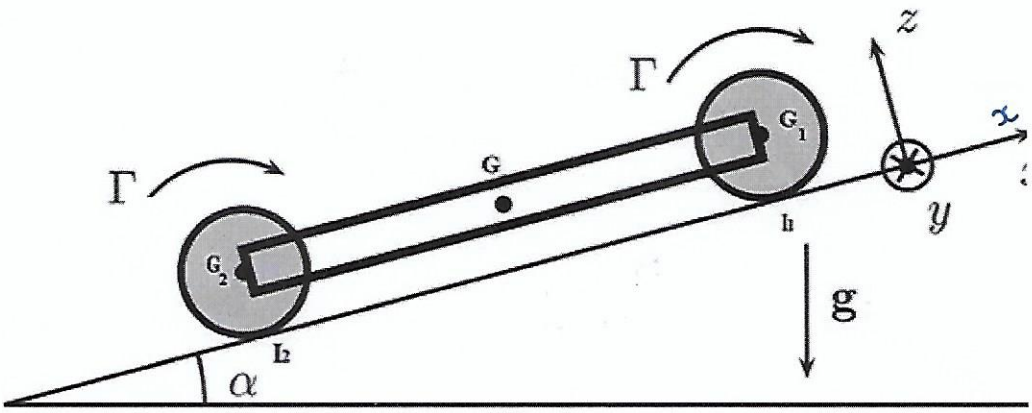
L'origine du repère O est à égale distance des axes de rotation des deux cylindres séparés de 2ℓ.
La planche est susceptible de se déplacer horizontalement le long de Ox **en glissant** sur les deux cylindres. **μ est le coefficient de frottement dynamique entre la planche et chacun des deux cylindres.**

On pose à l'instant t $\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{u_x}$

1) Faire le bilan et représenter les forces extérieures appliquées à la planche. Pour représenter les forces de frottement, on supposera qu'à tout instant la planche glisse sans cesse sur les deux cylindres, selon l'axe Ox, en vérifiant :
En I_1 : $V_{gliss1} < 0$; en I_2 : $V_{gliss2} > 0$.
2) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la planche pour en déduire deux équations de projection dans le référentiel R $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ **notées (1) et (2).**
3) Appliquer le théorème du moment cinétique en O à la planche pour en déduire une équation de projection dans le référentiel R $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ **notée (3).**
4) En utilisant la loi de frottement solide, dans le cas du glissement de la planche en I_1 et en I_2 et à l'aide des équations **(2) et (3)**, déterminer les composantes verticales et horizontales des réactions des deux cylindres sur la planche en fonction de x, m, ℓ, μ et g. Exprimer les normes des réactions.
5) En utilisant l'équation **(1)** et les résultats précédents, montrer que la planche effectue des oscillations. Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de ℓ, μ et g.
6) Montrer que l'on peut déterminer la valeur du coefficient de frottement dynamique μ entre la planche et chacun des deux cylindres, connaissant la période T des oscillations.

Exercice 2: Voiture à roues motrices

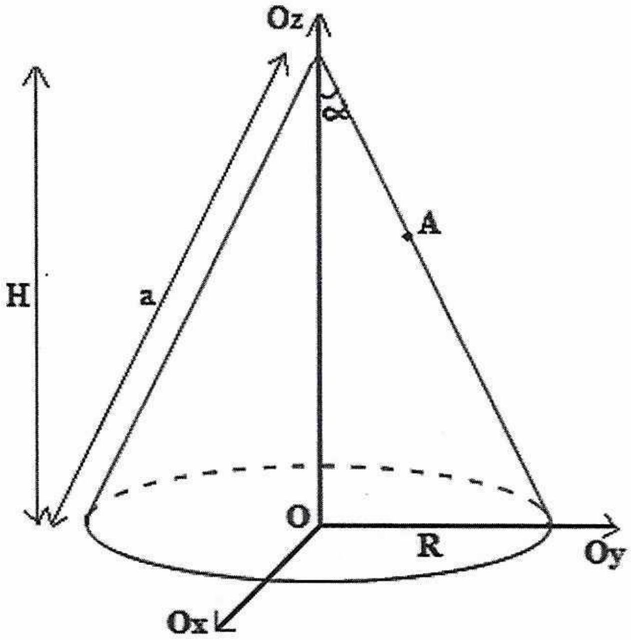
Une voiture à 4 roues motrices gravit un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
Elle est modélisée par une barre de centre d'inertie G, de masse M et de longueur 2l et par **deux roues motrices,** de masse m et de rayon r : une roue avant de centre d'inertie G_1 et une roue arrière de centre d'inertie G_2.
Le centre d'inertie G de la barre est également le centre d'inertie de la voiture. Le moment d'inertie de chaque roue par rapport à son axe de rotation est : $J = \frac{1}{2} mr^2$. Le moteur assure au niveau des roues un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u_y}$ (Γ positif et constant). On suppose qu'il y a **roulement des roues sans glissement** sur le plan, par conséquent l'angle commun dont les roues tournent est noté θ.
Les points de contact des roues avec le plan sont notées I_1 et I_2. Le coefficient de frottement avec le sol est le même pour les deux roues et est noté μ.



1) Faire le bilan et représenter les forces extérieures appliquées à la voiture.
2) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la voiture pour en déduire deux équations de projection, **notées (1) et** (2) dans le référentiel R ($\overrightarrow{\mathbf{u}_x}, \overrightarrow{\mathbf{u}_y}, \overrightarrow{\mathbf{u}_z}$) fixe galiléen.
3) Appliquer le théorème du moment cinétique en G pour la voiture et en déduire une équation de projection **notée (3)**.
4) Ecrire la condition de roulement sans glissement, en I1 et en I2, en déduire une relation entre $\ddot{x}_G$ et $\ddot{\theta}$, **notée (4)**.
5) Appliquer le théorème du moment cinétique en G_1 pour la roue 1 et en déduire une équation de projection **notée (5)**.
6) Appliquer le théorème du moment cinétique en G_2 pour la roue 2 et en déduire une équation de projection **notée (6)**.
7) En utilisant les équations **(1)**, **(4)**, **(5)** et **(6)**, exprimer le vecteur accélération de la voiture $\overrightarrow{\mathbf{a}_G}$ en fonction de m, M, Γ, r, g, α.
8) En déduire l'expression du couple moteur minimal permettant à la voiture de remonter la pente en partant de l'arrêt, en fonction de m, M, r, g, α.

Exercice 3 : Le cône de révolution

On considère un cône de révolution creux et homogène, d'axe Oz, de hauteur H, de cercle de base de rayon R, de masse M et de masse surfacique σ.



1) Exprimer en fonction de R et H :
   - la longueur a de la génératrice du cylindre,
   - le cosinus (**cosα**) et
   - la tangente (**tanα**) du demi-angle au sommet α.
2) Sur le schéma, représenter un **point A** sur le cône par ses coordonnées cylindriques **(ρ, φ, z)**. A l'aide de l'expression de **tanα**, montrez que les variables ρ et z ne sont pas indépendantes mais liées par une relation faisant intervenir R et H.
3) Exprimer l'élément de surface cylindrique **ds** classique entourant un point A (ρ, φ, z). L'expression de l'élément de surface **ds'** entourant le point A à la surface du cône est : $\mathbf{ds'} = \dfrac{\mathbf{ds}}{\cos\alpha}$
4) En déduire par intégration, l'expression de la surface latérale S' du cône, en fonction de π, R et H.
5) Déterminer les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie G du cône creux.