Contrôle EI2 2h00

Question 1 : 15-20 min

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition QR de A.
2. En déduire l'expression (sans calcul) de la matrice de projection P qui projette sur l'espace colonne de A.

Question 2 : 15 min

1. Calculer la meilleure droite (au sens des moindres carrés) passant par les points de coordonnées $(x_1, y_1) = (0, 1); (x_2, y_2) = (1, -1); (x_3, y_3) = (2, -3)$.

Question 3 : 25-30 min

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de A.
2. Donner forme échelonnée réduite R de A.
3. En déduire les 4 espaces fondamentaux de A. Expliquer un minimum vos réponses.
4. Calculer une base **orthonormale** (orthogonale et normale) de l'espace ligne de A (Attention : utiliser des vecteurs simples !).
5. Soit $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer la projection p de b dans l'espace ligne de A (Utiliser la question précédente pour vous simplifier les calculs!)

Question 4 : 20 min

Considérons une matrice A dont l'espace nul $N(A)$ est engendré par les 3 vecteurs ci-dessous:

$$N(A) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

1. Donner une matrice B dont l'espace colonne $C(B)$ est le même que l'espace $N(A)$. Expliquer.
2. Considérons maintenant que pour un vecteur b particulier, la solution particulière de l'équation $Ax = b$ est

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Un premier étudiant d'EI2 affirme qu'une seconde solution possible (à l'équation $Ax = b$) est :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors qu'un second étudiant d'EI2 affirme que c'est impossible ! Une seconde solution correcte est :

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Selon vous, qui a raison ? L'étudiant 1, l'étudiant 2 ou bien les 2 étudiants ont raison ? Expliquer.

Questions 5 : 5-10 min

Un étudiant d'ei2 a résolu l'équation : $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et il a trouvé la solution complète $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\forall c, d)$

- Donner la matrice A que l'étudiant a utilisé.