EI1&EI2PM **Contrôle continu 2 — 2h** **Bases d'analyse** ISTIA 2016-2017

Résumé du cours fourni, calculatrice et autres documents interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. (3 pts) Résoudre l'équation $z^4 = i$ dans $\mathbb{C}$. Donner la forme algébrique des solutions. Placer les solutions dans le plan complexe.

Exercice 2. (2 pts) Soit le nombre complexe

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2-2i}.$$

Déterminer les limites de z^n, $\bar{z}^n$ et $(z+\bar{z})^n$.

Exercice 3. (3 pts) Déterminer les limites des suites définies par :
(a) $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ (b) $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (c) $w_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ (d) $z_n = \frac{n}{(1+ni)^2}$

Exercice 4. (2 pts) Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x-1) & \text{si } x < 2 \\ a & \text{si } x = 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (2 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3 - 1$.
a) Montrer que f est une bijection et montrer que $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$ en est la réciproque.
b) Dessiner les graphes de f et de f^{-1} sur le même dessin. Y a-t-il une symétrie ?

Exercice 6. (3 pts) Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent
(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos(x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

Exercice 7. (3 pts) Rappel : $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\tanh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
On considère la fonction $k(x) = \tanh x$ sur $\mathbb{R}$.
a) Prouver que $k'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.
b) Étudier la fonction k (variations, convexité, asymptotes) et tracer son graphe.

Exercice 8. (2 pts) On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calculer $f'(0)$. La fonction $f'(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?