Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. (10 points) Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_2 - e_3$ et $f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3$.

1) Donner la matrice $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

2) Déterminer une base et la dimension de $\ker f$ et de Imf de f.

3) Déterminer si l'application f est injective, surjective ou bijective.

4) On pose $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_1 + e_3$ et $u_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3. En déduire la matrice $B = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. (5 points) Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Exercice 3. (5 points) $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A_m (on donnera le résultat sous forme factorisée).

2) Préciser le rang de A_m en fonction du paramètre réel m.

3) On considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ admettant $A_m = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_m)$ comme matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quel est le rang de f_m ? Pour quels réels m, f_m est-il surjectif ?