Contrôle continu n°2

Sans documents, sans calculatrice

Durée 1h20

Exercice 1

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnés dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ est-elle libre ?
2. En échelonnant par colonne, déterminez toutes les relations de dépendance linéaire vérifiées par $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4$.
3. Extraire de la famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ une famille libre maximale $\mathcal{B}'$.
4. La famille $\mathcal{B}'$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle génératrice ? Une base ? Mêmes questions pour la famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$.
5. Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4$ dans $\mathcal{B}'$.
6. Soit $A = \langle \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \rangle$ et $B = \langle \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4 \rangle$. Quelle propriété vérifie $A \cap B$? Déterminer une base de $A \cap B$.

Exercice 2

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donnés dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelles valeurs de m la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme-t-elle une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$?
2. Dans le cas $m = 2$, déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et calculer son inverse par la méthode de la matrice compagnon verticale.
3. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{r}$ dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.