

**Remarques :**

1. Durée de l'épreuve : 1h20
2. Aucun document autorisé
3. Calculatrice autorisée

10 p

**Sujet n°1 :** La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne ( $\mu$ ) et d'écart-type ( $\sigma$ ) inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

- 4 p
- 1 p
- 2 p
- 3 p

1. Déterminez les valeurs de  $\mu$  et  $\sigma$  qui permettent de respecter les spécifications imposées.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 et 230 jours ?
3. Quelle est la probabilité que 3 parmi 10 appareils prélevés au hasard de la production ait une durée de vie comprise entre 200 et 230 jours ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir moins de 20 appareils ayant une durée de vie comprise entre 200 et 230 jours dans un lot de 200 appareils prélevés au hasard de la production ?

7 p

**Sujet n°2 :** Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est donnée par l'expression :

$$f(x) = \begin{cases} a|x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1 p
- 3 p
- 3 p

1. Déterminez la valeur numérique de la constante  $a$  dans l'expression de la fonction de densité de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance et la variance de X.
3. Calculez la fonction génératrice de moments de X.

3 p

**Sujet n°3 :** Démontrez que si X est une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $E[X] = \lambda$ .

**Feuille de formules**

1) Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  alors,  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ;  $E[X] = \mu$ ;  $Var[X] = \sigma^2$

2)  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  (centrage et réduction d'une variable aléatoire X)

3) Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , alors  $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ ,  $x \geq 0$

4)  $M_X(t) = E[e^{Xt}]$  (fonction génératrice de moments pour la variable aléatoire X)

5)  $E[X] = \begin{cases} \int x f_X(x) dx & \text{si } X = \text{v. a. continue} \\ \sum x_i P(X = x_i) & \text{si } X = \text{v. a. discrète} \end{cases}$  (espérance d'une variable aléatoire X)

6)  $Var[X] = \begin{cases} \int (x - E[X])^2 f_X(x) dx & \text{si } X = \text{v. a. continue} \\ \sum (x_i - E[X])^2 P(X = x_i) & \text{si } X = \text{v. a. discrète} \end{cases}$

7)  $Var[X] = m_2 - m_1^2$

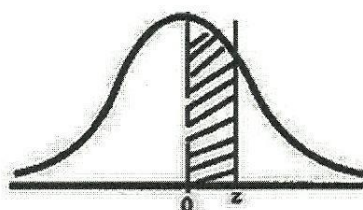
8)  $m_k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) = M_X^{(k)}(t)$

9) Si  $X \sim b(n, p)$ , alors  $P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ ,  $0 \leq x \leq n$ ;  $E[X] = np$ ;  $Var[X] = np(1-p)$ ; si  $np \geq 5$  et  $n(1-p) \geq 5$  alors  $X \approx N(np; \sqrt{np(1-p)})$

10) Si  $X \sim \text{Pascal}(k, p)$ , alors  $P(X = x) = C_{x-1}^{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$ ,  $x = k, k+1, \dots$  et  $k = 1, 2, \dots$ ;  $E[X] = k/p$  et  $Var[X] = k(1-p)/p^2$

11) Si  $X \sim g(p)$ , alors  $P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$ ,  $x = 1, 2, \dots$ ;  $E[X] = \frac{1}{p}$ ;  $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

12) Si  $X \sim h(N, n, p = n_1/N)$ , alors  $P(X = x) = \frac{C_{n_1}^x C_{N-n_1}^{n-x}}{C_N^n}$ ,  $x = \begin{cases} 0, 1, \dots, n & \text{si } n \leq n_1 \\ 0, 1, \dots, n_1 & \text{si } n > n_1 \end{cases}$ ;  $E[X] = n \frac{n_1}{N}$ ;  $Var[X] = n \frac{n_1}{N} \left(\frac{N-n_1}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$



| z   | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| 3,1 | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,4993 |
| 3,2 | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 |
| 3,3 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4997 |
| 3,4 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4998 |
| 3,5 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 |
| 3,6 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3,7 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3,8 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3,9 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |