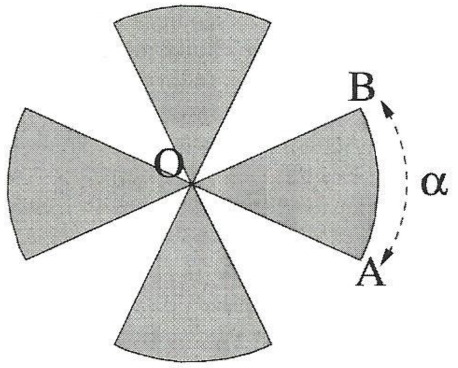
	ISTIA EI-1	**Mécanique du solide**	**CC2** **2h** **Sans document** **Sans calculette**

Exercice 1:

Une hélice est constituée de quatre palles identiques soudées entre-elles en O. Chaque palle homogène, de masse m, d'épaisseur négligeable, est caractérisée par un rayon R = OA = OB et un angle d'ouverture $\alpha = \left(\widehat{\mathbf{OA},\mathbf{OB}}\right)$ **(Figure 1).**



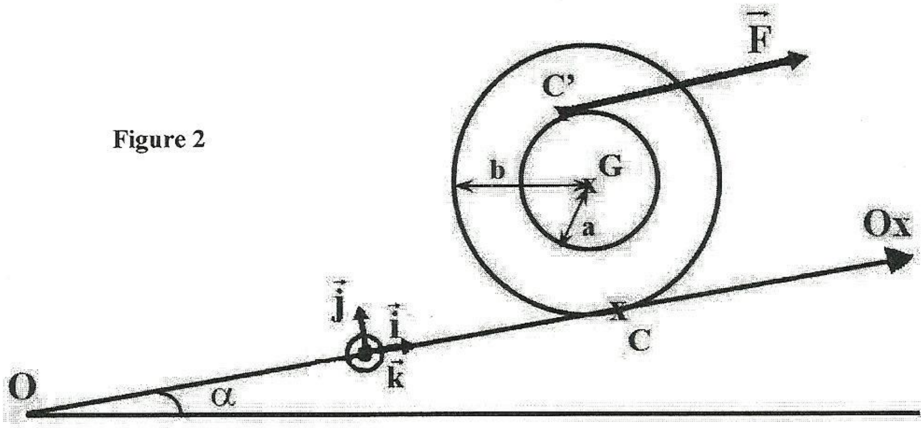
1) En vous servant d'un système de coordonnées que vous expliciterez et que vous représenterez sur un schéma, déterminez l'expression de σ la masse surfacique d'une palle, en fonction de m, R et α.
2) Déterminez le moment d'inertie J d'une palle par rapport à l'axe de symétrie de l'hélice (perpendiculaire au plan de l'hélice et passant par O).
3) En déduire le moment d'inertie J_T de l'hélice en fonction de m et R.

Exercice 2:

Dans un référentiel R fixe orthonormé (O, $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}$), on considère une bobine **de fil, de centre de masse G,** constituée :

- d'**un cylindre creux C homogène**, de hauteur H, de rayon a et de masse 2m (σ masse surfacique)
- et de **2 disques pleins (D_1 et D_2) homogènes** centrés aux extrémités du cylindre, d'épaisseur h, de rayon b (> a) et de masse m (ρ masse volumique)
- de fil (masse négligeable) enroulé sur le cylindre creux perpendiculairement à l'axe du cylindre et dans son plan de symétrie longitudinal passant par G **(Figure 2).**

Figure 2



I-Détermination du moment d'inertie de la bobine par rapport à son axe de révolution Δ.

En choisissant des repères que vous définirez et que vous représenterez clairement :

1) Déterminer le moment d'inertie I_C du cylindre creux C par rapport à son axe de révolution Δ (= Gz) en fonction de m et a.

2) Déterminer le moment d'inertie I_D de l'un des 2 disques (D_1 ou D_2) par rapport à son axe de révolution Δ (= Gz) en fonction de m et b.

3) En déduire le moment d'inertie de la bobine par rapport à son axe de révolution Δ (= Gz) , notée I_Δ.

II-Détermination de la force F à exercer sur le fil pour que la bobine monte la pente, sans glisser en C.

La bobine est posée sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale et on exerce sur le fil parallèlement au plan incliné, une force $\vec{\mathbf{F}}$ dirigée vers le haut. On cherche à déterminer la force F à exercer sur le fil en C' parallèlement au plan incliné et orientée vers le haut pour que la bobine monte la pente, sans glisser en C.

Soient :

- C : point de contact de la bobine avec le plan incliné
- $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{N}}$, la réaction du plan sur la bobine

- X : abscisse de G à l'instant t
- $\dot{\theta} = \omega$: vitesse angulaire de rotation à l'instant t
- Dans la suite de l'exercice, on notera M (= 4m) la masse totale de la bobine.
- Dans la suite de l'exercice, on notera I_Δ, le moment d'inertie de la bobine par rapport à son axe de révolution, sans le détailler.

1) Donner la condition de roulement sans glissement en C, et grâce au théorème de composition des vitesses en déduire une expression de $\overrightarrow{V_G}$ du centre d'inertie de la bobine, en fonction de b et ω (équation 1).

2) Faire un schéma indiquant toutes les forces ainsi que les moments (sens et direction) en G, extérieurs appliqués sur la bobine, dans l'hypothèse où la bobine monte la pente (NB : La force de frottement solide empêche la bobine de glisser vers le bas de la pente par déroulement du fil)

3) Appliquer le théorème du centre d'inertie pour la bobine et le projeter sur les axes Ox et Oy (équations 2 et 3)

4) Appliquer le théorème du moment cinétique pour la bobine en G et le projeter sur l'axe de rotation Gz (équation 4)

5) En utilisant les équations 1 et 4, exprimer $\ddot{x}$ en fonction de a, b, I_Δ, T et F (expression 5).

6) En déduire l'expression de T en fonction de a, b, I, $\ddot{x}$ et F (équation 6)

7) En vous servant des expressions (2) et (6), montrer que lorsque la bobine monte le plan incliné alors :

$$\mathbf{F > \left(\frac{b}{a+b}\right) Mg\sin\alpha}$$

8) En déduire l'expression de T en fonction de F, I, a, b et M.

9) Soit μ le coefficient de frottement de glissement entre le plan et la bobine. Déterminer la condition sur $\vec{F}$ pour que le roulement soit sans glissement en C.