# Contrôle EI2 2h10

## Question 1 : 10 min

Considérons une matrice $A$ dont l'espace nul est engendré par :

$$< \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

1. Si possible, donner le rang de $A$, la dimension de $C(A)$.
2. Considérons la matrice $B$ identique à $A$ à l'exception de sa seconde ligne qui est (ligne 2 de A)-(ligne 1 de A). Donner l'espace nul de B ?
3. Considérons la matrice $C$ identique à $A$ à l'exception de sa seconde colonne qui est (colonne 2 de A)- (colonne 1 de A). Donner l'espace nul de C ?

## Question 2 : 15 min

Après avoir effectuée la procédure d'élimination sur le système $Ax = b$, on obtient un système sous forme échelonnée réduite $Rx = d$. La solution complète du système est :

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall c_1, c_2.$$

1. Donner la matrice $R$ et le second membre $d$.
2. Donner le rang $r$ de la matrice $A$.

## Question 3 : 15 min

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $N(A)$ et $C(A)$.
2. En déduire la forme échelonnée réduite $R^\star$ de la matrice $B$ de taille $6 \times 8$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

## Questions de réflexion 4 : 10 min

1. Quelles sont les valeurs possibles du déterminant d'une matrice de projection ? Expliquer.
2. Quelles sont les valeurs possibles du déterminant d'une matrice de permutation ? Expliquer.
3. Considérons une matrice $A$ taille $3 \times 5$ de rang $r = 3$ et notons $R$ sa forme échelonnée réduite. Que pouvez-vous dire à propos des solutions de l'équation $Ax = b$ ? Expliquer.

## Questions rapides 5 : 10 min

1. Est ce qu'une matrice $A$ et sa forme échelonnée réduite $R$ ont le même espace colonnes $C(A) = C(R)$ ? Expliquer.
2. Est ce qu'une matrice $A$ et sa forme échelonnée réduite $R$ ont le même espace ligne $C(A^T) = C(R^T)$ ? Expliquer.
3. Est ce que si une matrice $A$ de taille $m \times n$ admet ses colonnes indépendantes alors $m \geq n$ ? Expliquer.
4. Est ce que si une matrice $A$ de taille $m \times n$ est de rang $r = m$, alors l'espace nul à gauche contient uniquement le vecteur $O$ ? Expliquer.
5. Est ce que si deux matrices $A$ et $B$ ont les mêmes espaces fondamentaux $C(A) = C(B)$, $C(A^T) = C(B^T)$, $N(A) = N(B)$ et $N(A^T) = N(B^T)$ alors $A = B$ ? Expliquer.

## Question 6 : 15 min

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Donner la projection de $b$ sur l'espace colonnes de $A$.
2. Donner la matrice de projection $P$ qui projette un vecteur quelconque sur l'espace colonnes de $A$.
3. Donner une base orthogonale des 4 espaces fondamentaux de $A$.

## Sudoku 7 : 15 min

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 5 | 4 | 1 | 6 | 9 | 2 | 7 |
| 2 | 9 | 6 | 8 | 5 | 7 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 7 | 2 | 9 | 3 | 6 | 5 | 8 |
| 5 | 6 | 9 | 1 | 3 | 4 | 7 | 8 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 8 | 5 | 4 | 9 |
| 7 | 4 | 8 | 5 | 2 | 9 | 1 | 6 | 3 |
| 6 | 5 | 2 | 7 | 8 | 1 | 3 | 9 | 4 |
| 9 | 8 | 1 | 3 | 4 | 5 | 2 | 7 | 6 |
| 3 | 7 | 4 | 9 | 6 | 2 | 8 | 1 | 5 |

La solution d'un problème de sudoku est une matrice $A$ de taille $9\times 9$ (voir exemple) qui à la propriété que les chiffres de 1 à 9 apparaissent une seule fois sur chaque ligne et colonne.

1. Toutes ces matrices $A$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$A = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + 9P_9$$

   où les matrices $P_i$ sont des matrices de quel type ?
2. Soit $e$ un vecteur $9 \times 1$ avec neuf fois le chiffre 1. Quel est le rang de la matrice $9 \times 3$ dont les colonnes sont $e$, $Ae$ et $A^T e$ ? Expliquer.

## Question 8 : 10 min

1. Soit $P$ une matrice de projection sur l'espace colonnes de $A$. Soit $Q$ une matrice orthogonale avec le même nombre de lignes que $A$. Donner la matrice de projection qui projette sur l'espace colonne de $QA$ ?
2. Considérons 3 vecteurs $a$, $b$ et $c$ indépendants. Soit $P$ la matrice de projection sur l'espace engendré par les combinaisons linéaires de $a$ et $b$. Supposons que nous ayons appliqué le processus de Gram-Schmidt sur les vecteurs $a$, $b$ et $c$ afin d'obtenir $q_1$, $q_2$ et $q_3$. Donner l'expression du vecteur unitaire $q_3$ en fonction de $P$ et $c$ uniquement.

## Question 9 : 15 min

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

1. Donner la décomposition $LU$ de la matrice $A$.
2. Donner les 4 espaces fondamentaux de la matrice $A$.
3. Quelles sont les conditions sur $b$ pour que $Ax = b$ soit résoluble.
4. En déduire la solution complète de $Ax = b$.

## Question 10 : 10 min

Considérons l'espace vectoriel des polynômes de la forme $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Est-ce que les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels ?
Expliquer brièvement vos réponses.

— Les polynômes tels que $p(1) = 0$
— Les polynômes tels que $p(0) = 1$
— Les polynômes tels que $a + b = c + d$
— Les polynômes tels que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$