

Mathématiques pour la théorie du signal
Deuxième contrôle continu.
Durée 1h20

L'usage d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.
L'usage du photocopie est autorisé.

Exercice 1. (4pts) Rechercher les originaux des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{5}{(p+4)^2 + 25}, \quad F_2(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-p})$$

$$F_3(p) = \frac{p}{p^2 + 16} - \frac{5}{p^2 + 4}$$

Exercice 2. (8pts) On recherche une fonction causale $t \mapsto x(t)$, vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^{-t} \text{ pour } t > 0$$

et les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

On note $X(p)$ la transformée de Laplace de $x(t)$.

1. Écrire la relation vérifiée par $X(p)$, induite par (E).
2. Calculer $X(p)$.
3. En déduire la fonction $t \mapsto x(t)$.

Exercice 3. (8pts) On considère la fonction 2π -périodique $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $u(t) = t$, si $t \in]-\pi, \pi[$ et $u(-\pi) = u(\pi) = 0$.

1. Tracer le graphe de u .
2. Déterminer la série de Fourier de u .
3. Calculer l'énergie du signal u .
4. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.