Examen de statistique
EI.2 – promotion 2010-2011
Chargé de cours : M. Teodor TIPLICA
Durée de l'épreuve : 1h30'
Remarque : Aucun document autorisé

---

15 p

Exercice n° 1

On veut tester l'égalité des moyennes de deux populations normales de variances σ_1^2 et σ_2^2 connues. Dans le cas où les deux moyennes sont égales on accepte un risque α de décider à tort qu'elles sont différentes. Par contre, si l'écart entre les deux moyennes est δ on accepte un risque β de décider à tort qu'elles sont égales. L'écart δ peut être positif ou négatif.

Déduisez la formule qui permettra de trouver le nombre d'observations $n = n_1 = n_2$ nécessaires à prélever de chaque population pour effectuer ce test.

5 p

Exercice n° 2

Démontrez que :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

où : $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ est un échantillon aléatoire de taille n, prélevé d'une population statistique et, $\overline{X}$ est la moyenne de l'échantillon.

est un estimateur sans biais de la variance (σ^2) de la population.

Feuille de formules

1) Risque $\alpha = P\left(\text{rejeter } H_0 \middle| H_0 \text{ vraie}\right)$; risque $\beta = P\left(\text{accepter } H_0 \middle| H_0 \text{ fausse}\right)$
2) Statistiques de test pour deux moyennes et deux variances :

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \; ; \qquad Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{S_c\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \textit{loi de Student avec } \nu = n_1 + n_2 - 2\,ddl \quad \text{avec } S_c^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim \textit{loi de Student avec } \nu = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left[\frac{S_1^2}{n_1}\right]^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left[\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2} \text{ dll}$$