Université d'Angers – ISTIA – EI2 & PM
Mercredi 13 mai 2015

Contrôle continu n°1 de Calcul numérique[1] – 1re session

Durée : 2h

Avec documents de cours, de TD, y compris les fichiers.m

Toute tentative de connexion à Internet sera sanctionnée par un zéro.

Les calculs avec Matlab sont à rendre sur votre espace Moodle. Les résultats théoriques sont à rendre sur copie papier, en y reportant également les principaux résultats numériques trouvés précédemment.

Exercice 1. (Fin du TD5 sur l'optimisation unidirectionnelle.) [13.5 pts] On cherche le minimiseur x^* de la fonction g définie sur $I = [0; 2]$ par :

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x.$$

Pour cela on cherche x^* solution de

$$f(x) = g'(x) = x^3 - x - 1 = 0 \tag{1}$$

en appliquant une méthode de point fixe du type $x_{k+1} = F(x_k)$, $x_0 \in I$. Trois fonctions F différentes sont considérées ci-dessous :

$$F_1(x) = x^3 - 1,\ F_2(x) = \frac{1}{x^2 - 1},\ F_3(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}.$$

1. (3 pts) Reprenez l'algorithme de Newton-Raphson vu en TD pour (1) et modifiez-le pour inclure le test d'arrêt $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-6}$. Partant de $x_0 = 1.5$, en déduire x^* avec 7 chiffres significatifs. Combien d'itérations sont nécessaires ? Indication : boucle while
2. (1 pt) Justifiez la considération des trois fonctions F_1, F_2 et F_3.
3. (1 pt) Montrez que :$\forall x \in [1, 2]$, $|F_1'(x)| \geq 3$;
4. (1.5 pt) Déterminez les intervalles fermés J de $\mathbb{R}$ tels que $F_2(J) \subset J$;
5. (1 pt) Quel est le domaine de définition de F_3 dans $\mathbb{R}$? Donnez le tableau de variations de F_3 sur I.
6. (2 pts) Tracez sur une même figure les graphes de F_3 et F_3' sur I.
7. (1 pt) Que concluez-vous des questions précédentes sur le choix possible entre les trois fonctions F_1, F_2, F_3 pour l'application du théorème des approximations successives ?
8. (1.5 pts) Pour le choix ci-dessus de F parmi F_1, F_2, F_3, écrivez avec Matlab l'algorithme des approximations successives qui donne x_6 en partant de $x_0 = 1.5$ (7 chiffres significatifs demandés).
9. (1.5 pts) Reprenez l'algorithme précédent pour inclure le test d'arrêt $|x_k - x_{k-1}| \leq 10^{-6}$. Partant de $x_0 = 1.5$, combien d'itérations sont nécessaires ? Lequel des deux algorithmes considérés (1. et 9.) est le plus rapide ?

Exercice 2. (Fin du TD4 sur la formule de Taylor et les séries entières.) [6.5 pts] Le travail demandé est à faire sur Matlab.

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 :

$$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

[1] T.S.V.P.

1. (0.5 pt) Définir un vecteur tt de 100 points équidistants allant de 0 à 4.

2. (2 pts) Définir une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez le vecteur $xx = f(tt)$. (On pourra faire une boucle.) Indication : *expm*

3. (2 pts) Déterminez le temps t_1 pour lequel $f(t_1) = 0.1$. Indication : *fzero*

4. (2 pts) Représentez avec Matlab sur une même figure les graphes des fonctions $x = f(t)$, $x = 0.1$, $x = 0$, $t = t_1$. Ajoutez un titre et une légende.