Université d'Angers, ISTIA, EI1 - EI2PM
Jeudi 27 août 2015

Compléments d'analyse – 2e session

Durée : 2h

Avec documents de *ce* cours & TD. Sans calculatrice

Exercice 1 [6 pts]

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = \tan(x) \tag{1}$$

1. (2 pts) Déterminez la solution générale de l'équation homogène associée à (1).
2. (1.5 pts) Calculez sous une forme simple la dérivée de la fonction suivante :

$$\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

   En déduire une primitive de $\frac{1}{\cos(x)}$.

3. (2 pts) Déterminez une solution particulière de (1) par la méthode de variation des constantes. On pourra s'aider du 2.
4. (0.5 pt) Déterminez la solution particulière de (1) telle que $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

Exercice 2 [9 pts]

On considère les intégrales doubles

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(x^3+y^3\right) dxdy,\ I_1 = \iint_D x^3 dxdy \\ \text{avec } D &= \left\{(x,y)\,;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\},\ \text{où } a>0,\ b>0. \end{aligned}$$

et le changement de variables :

$$g : [0,\infty[\times[-\pi,\pi[\ \to \mathbb{R}^2,\ (r,\theta)\mapsto(x,y)\,,\ \begin{cases} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\sin(\theta)\,. \end{cases}$$

1. (1 pt) Calculez le Jacobien associé à ce changement de variables.
2. (1 pt) Déterminez $g^{-1}(D)$.
3. (1 pt) Démontrez que

$$\begin{aligned} \cos^3(\theta) &= \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\right) \\ \sin^3(\theta) &= \frac{1}{4}\left(-\sin(3\theta)+3\sin(\theta)\right) \end{aligned}$$

4. (2.5 pts) En déduire le calcul de I à l'aide des variables r, θ.

5. (1 pt) Décomposez l'intégrale double I_1 en deux intégrales simples successives, la première selon y et la seconde selon x.

6. (2 pts) À l'aide du changement de variable $u^2 = a^2 - x^2$, en déduire le calcule de I_1.

7. (0.5 pt) Retrouvez à partir du calcul de I_1 la valeur de I.

Exercice 3 [5 pts]

On considère une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le champ de vecteurs

$$\vec{V} : M = (x, y, z) \to \vec{V}(M) = (P, Q, R), \text{ avec } \begin{cases} P = x\phi(\rho) \\ Q = y\phi(\rho) \\ R = 2z\phi(\rho) \end{cases} \text{ où } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. (2.5 pts) Démontrez que $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ si et seulement si ϕ est solution de

$$4\phi(\rho) + \rho\phi'(\rho) = 0 \tag{2}$$

2. (2.5 pts) Sachant que $\phi(1) = 1$, déterminez ϕ puis $\vec{V}$.