Université d'Angers, ISTIA, EI2&PM
Mercredi 27 avril 2015

Systèmes dynamiques – Contrôle continu n°2

Durée : 2h

Avec documents de cours et TD. Sans calculatrice

Exercice 1

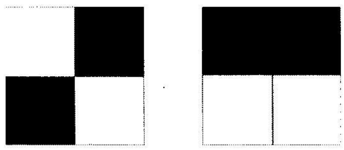

Image 1 . Image 2

Soit $E_4 = \{-1, +1\}^4$. Un vecteur colonne $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ de E_4 est interprété comme une image de 4 pixels noirs ou blancs, avec $x_i = +1$ pour un pixel noir et $x_i = -1$ pour un pixel blanc, ces pixels étant lus dans l'ordre de gauche à droite et de haut en bas. Par exemple, les images (1) et (2) ci-dessus correspondent aux vecteurs x^1 et x^2 respectifs suivants :

$$x^1 = (-1, +1, +1, -1)^T, \; x^2 = (+1, +1, -1, -1)^T.$$

Soit $X = (x^1, x^2) \in M_{4,2}(\{-1, +1\})$ la matrice 4 lignes et 2 colonnes formée des vecteurs colonnes x^1 et x^2. On définit la fonction *ech* de $\mathbb{R}$ dans $\{-1, +1\}$ de la façon suivante :

$$ech(\xi) = \begin{cases} +1 \text{ si } x \geq 0, \\ -1 \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

On définit alors l'application *Ech* de $\mathbb{R}^4$ dans $\{-1, +1\}$ par $(Ech(x))_i = ech(x_i)$, $i = 1, \ldots, 4$.

1. Calculez les matrices $L = XX^T$ et $N = X^T X$. Quelle est l'interprétation de N en termes de produits scalaires ?

2. Soit F_L l'application de E_4 dans lui-même définie par $F_L(x) = Ech(Lx)$. Calculez $F_L(x^1)$ et $F_L(x^2)$. Que remarquez vous ?

3. Déterminez tous les points fixes de F_L.

Exercice 2

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2xy \\ 2y - x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ et soit le système différentiel non-linéaire :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)). \tag{1}$$

1. Déterminez les points d'équilibre de (1), i.e. les points X_0 tels que $f(X_0) = 0$. Que représentent les fonctions constantes $X(t) = X_0$ pour (1) ?

2. On admet que le portrait de phase du système différentiel (1) au voisinage de chacun des points d'équilibre X_0 précédents est approximé par celui de $\dot{Y}(t) = AY(t)$ où $Y(t) = X(t) - X_0$ et $A = J_f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X_0) \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de f au point X_0.

   (a) Déterminez les paramètres τ, δ et Δ étudiés en cours pour chacun des points d'équilibre X_0 précédents.

   (b) En déduire dans chaque cas la nature du portrait de phase du système (1) au voisiange de X_0.

Exercice 3

Soient les fonctions causales

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^2 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto f(t-s)\, g(s)$

1. Représentez graphiquement le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ où ϕ ne s'annule pas.
2. Calculez le produit de convolution $(f * g)(t)$.

Exercice 4

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}. \tag{2}$$

de la forme $\dot{X}(t) = AX(t),\ X(0) = X_0$.

1. À l'aide de la transformation de Laplace $\mathcal{L}$, transformez le système (2) en un système algébrique $B(p)\tilde{X}(p) = X_0$, où $\tilde{X}(p) = \mathcal{L}(X(t))$ l'on précisera la matrices $B(p)$ carrée d'ordre 3.
2. Calculez $B(p)^{-1}$. En déduire $\tilde{X}(p)$.
3. Déterminez l'original $X(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tilde{X}(p)\right)$ solution de (2).