Université d'Angers, ISTIA, EI2&PM
Lundi 9 mars 2015

Systèmes dynamiques – Contrôle continu n°1

Durée : 1h20

Avec documents de cours et TD. Sans calculatrice

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (1.5 pts) Soit le vecteur collone $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Calculez AW. Que peut-on en déduire ?

2. (4 pts) Déterminez les valeurs propres de A. Pour chacune d'elle, déterminez une base du sous-espace propre associé. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. (2 pts) Explicitez les coefficients de A^n en fonction de n.

4. (1.5 pts) Résoudre le système récurrent

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = -v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{array} \right. \qquad (1)$$

5. (1.5 pts) Déterminez la solution particulière de (1) telle que $u_0 = 2,\ v_0 = 0,\ w_0 = 1$. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?

6. (5 pts) Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -y(t) + 2z(t) + 2\exp(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) - z(t) + \exp(t) \end{array} \right. \qquad (2)$$

7. (0.5 pt) Déterminez la solution particulière de (2) satisfaisant les conditions initiales $x(0) = 2,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$.

Exercice 2

Le taux proportionnel T, relié au taux mensuel t par $t = \frac{T}{12}$, est celui retenu couramment lors des négociations entre le prêteur et l'emprunteur. Mais pour le contrat, la loi impose le calcul d'un taux effectif global R couramment appelé TEG (ou taux actuariel). Il est plus proche de la réalité dans le sens ou le taux mensuel r associé est donné par

$$(1+r)^{12} = R$$

De plus, il tient compte des frais de dossier F payés dès le premier déblocage par l'emprunteur et de l'échelonnement éventuel des sommes empruntées. Pour fixer les idées, supposons que la somme empruntée M pour une durée de n mois soit débloquée en deux fois, une partie M_1 à l'instant initial et l'autre partie M_2 au bout de p mois ($p < n$). À la fin des remboursements, i.e. à la fin du $n^{ème}$ mois, le bilan entre d'une part les sommes empruntées M_1, M_2 et d'autre part les n mensualités constantes a versées augmentées des frais de dossier F est de la forme :

$$M_1 \times d_1 + M_2 \times d_2 = F \times c_0 + \sum_{k=1}^{n} a \times c_k \tag{3}$$

où $d_1, d_2, c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des coefficients de valorisation à la fin du $n^{ème}$ mois des sommes associées dans (3).

1. (3 pts) À l'aide de quelques explications, déterminez $d_1, d_2, c_0, c_1, \ldots, c_n$ en fonction de r, p et n.

2. (1 pt) En déduir a en fonction de M_1, M_2, F, n, p, R.

Rappels de cours

Solution particulière

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante, avec $a \neq 0$:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{4}$$

et soit l'équation caractéristiques associée :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{5}$$

Une solution particulière y_p peut être cherchée, selon la forme de f, sous la forme donnée dans le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, $P(x)$ est un polynôme, ω, α, β et k sont des nombres réels, $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ à déterminer et A, B sont des constantes réelles à déterminer.

Second membre $f(x)$	Solution particulière $y_p(x)$
$f(x) = k = cste$	$y_p(x) = A = cste$
$f(x) = P(x)$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x) & \text{si } c \neq 0, \\ y_p(x) = xQ(x) & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ y_p(x) = x^2Q(x) & \text{si } c = b = 0. \end{cases}$
$f(x) = \alpha \exp(kx)$	$\begin{cases} y_p(x) = A\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ pas racine de (5) : } k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = Ax\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ racine simple de (5)} \\ y_p(x) = Ax^2\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ racine double de (5) : } r_1 = r_2 = k. \end{cases}$
$f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$	$\begin{cases} y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \\ \quad \text{si } i\omega \text{ pas racine de (5)} \\ y_p(x) = x(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)) \\ \quad \text{si } i\omega \text{ racine de (5)} \end{cases}$
$f(x) = P(x)\exp(kx)$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x)\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ pas racine de (5) : } k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = xQ(x)\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ racine simple de (5) : } r_1 \neq r_2,\ k = r_1 \text{ ou } r_2, \\ y_p(x) = x^2Q(x)\exp(kx) \\ \quad \text{si } k \text{ racine double de (5) : } r_1 = r_2 = k. \end{cases}$
$f(x) = \exp(kx)(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))$	$\begin{cases} y_p(x) = \exp(kx)(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)) \\ \quad \text{si } k + i\omega \text{ pas racine de (5)} \\ y_p(x) = x\exp(kx)(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)) \\ \quad \text{si } k + i\omega \text{ racine de (5)} \end{cases}$

Formule de la comatrice

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On a $P^{-1} = \frac{\text{com}(P)^T}{\det(P)}$ où $\text{com}(P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini par $\text{com}(P) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)$, $\Delta_{i,j}$ étant le déterminant d'ordre $n-1$ de la matrice carrée obtenue à partir de P par suppression de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

Relations entre une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (avec égalités éventuelles)

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k, \ tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$