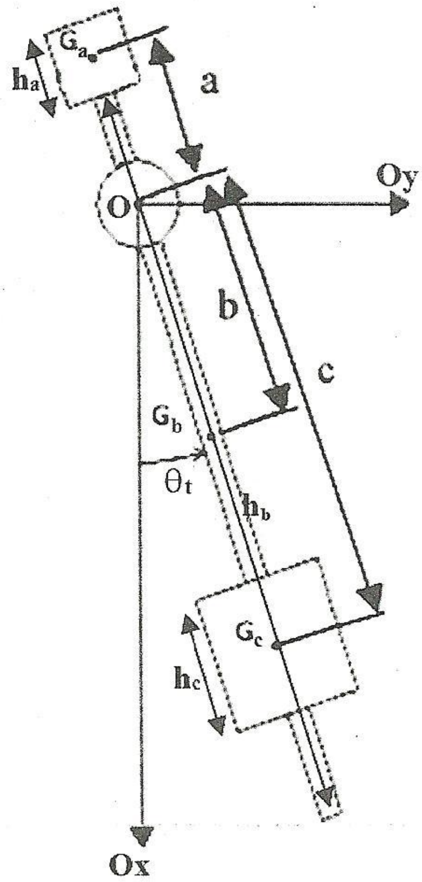
IstiA	***ISTIA*** ***EI-1***	**Mécanique du solide**	CC2 **Sans document,** **Sans calculatrice**

Exercice 1 : Pendule pesant



Un pendule pesant comporte les éléments suivants, considérés comme des **solides volumiques et homogènes (Figure 1)** :

- Un cylindre de plastique blanc **(a)** de centre de masse $\mathbf{G_a}$, de masse $\mathbf{M_a}$, de longueur $\mathbf{h_a}$, de rayon $\mathbf{R_a}$ et de masse volumique $\boldsymbol{\rho_a}$.
- Une tige cylindrique **(b)** de centre de masse $\mathbf{G_b}$, de masse $\mathbf{M_b}$, de longueur $\mathbf{h_b}$, de rayon $\mathbf{R_b}$ et de masse volumique $\boldsymbol{\rho_b}$.
- Un cylindre métallique creux **(c)** de centre de masse $\mathbf{G_c}$, de masse $\mathbf{M_c}$ de hauteur $\mathbf{h_c}$, de rayon extérieur $\mathbf{R_2}$ et de rayon intérieur $\mathbf{R_1}$. et de masse volumique $\boldsymbol{\rho_c}$.
- Un cylindre **(d)** de plastique blanc, horizontal fixe en O sur la tige est emboîté sur l'axe de rotation Oy, de masse négligeable.

1) Exprimer le moment d'inertie I_Δ d'un cylindre plein homogène de masse **M**, de longueur **h**, de rayon **R** et de masse volumique $\boldsymbol{\rho}$, par rapport à un de ses axes diamétraux Δ appartenant à son plan de symétrie médian (plan passant par G et coupant le cylindre à moitié de sa longueur). Faire un schéma pour expliciter le repère choisi et les paramètres du calcul.
2) En déduire les moments d'inertie I_{GaZ} et I_{GbZ}, respectivement des cylindres pleins **(a)** et **(b)** par rapport à l'axe GZ de leur plan médian.
3) En déduire le moment d'inertie I_{GcZ}, du cylindre creux **(c)** par rapport à l'axe GZ de son plan médian.
4) Grâce au théorème d'Huygens, exprimer le **moment d'inertie $\mathbf{I_{oz}}$** du pendule pesant par rapport à son axe de rotation Oz, en fonction de $\mathbf{M_a}$, $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{R_a}$, $\mathbf{M_b}$, $\mathbf{h_b}$, $\mathbf{R_b}$, $\mathbf{M_c}$, $\mathbf{h_c}$, $\mathbf{R_2}$ et $\mathbf{R_1}$, en ne considérant que les trois principaux cylindres **(a)**, **(b)** et **(c)** et en négligeant le cylindre horizontal (d).
5) En considérant que le pendule pesant est soumis à son poids (on suppose que le **barycentre G du pendule est confondu avec $\mathbf{G_b}$**) et à la réaction de son support en O considérée sans frottement solide, exprimer grâce au théorème du moment cinétique en O, l'équation du mouvement du pendule pesant.
6) Dans le cas des petites oscillations (θ_t petit), donner une solution de cette équation, en indiquant la pulsation propre du pendule. Initialement, à $t_0 = 0$, le pendule fait un angle θ_0 (petit) avec la verticale et il est lâché sans vitesse initiale.

Donnée : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$

Exercice 2 : Etude de la chute d'une barre sur une patinoire

Une barre rigide AB, homogène de **masse m**, de **longueur 2l** et de section négligeable, est posée verticalement sur une patinoire horizontale **(Figure 2a).**

Soit $\vec{\mathbf{R}}$, la réaction de la glace en A, le contact est supposé sans frottement (glissement parfait avec coefficient frottement $\mu = 0$).

1) Déterminer le moment d'inertie I_Δ de la barre par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre passant par son centre de gravité M. La barre AB est considérée comme un solide linéique homogène (masse linéique λ).

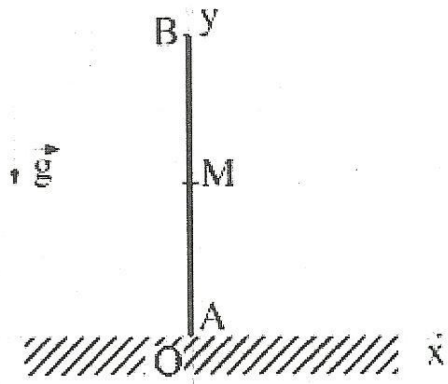


Fig. 2a

A l'instant initial considéré $t_0 = 0$, la barre est très légèrement déplacée de son équilibre ($\theta_0 \approx 0$), sans vitesse initiale et tombe. Soit $\theta_t = \mathbf{f(t)}$, l'angle que fait la barre par rapport à la verticale à t **(Figure 2b)**.

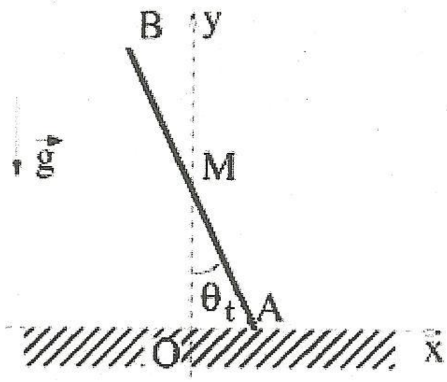


Fig. 2b

2) En utilisant le théorème de la résultante dynamique :

a) Donner l'expression de l'accélération de M, notée $\mathbf{a_M}$ en fonction de **R, m et g** ***(équation 1)***.

b) Définir le mouvement du centre d'inertie M de la barre AB dans le référentiel absolu R (O, x, y, z), lié à la patinoire et considéré comme galiléen.

c) D'après la **figure 2b**, exprimer y_M, à l'instant t, en fonction de l et θ_t ***(équation 2)***. En déduire une deuxième expression de $\mathbf{a_M}$ en fonction uniquement de $\ddot{\theta}_t, \dot{\theta}_t, \sin\theta_t, \cos\theta_t$, et **l** ***(équation 3)***.

d) En déduire une expression de la réaction R de la glace en A, à l'instant t, en fonction uniquement de $\ddot{\theta}_t, \dot{\theta}_t, \sin\theta_t, \cos\theta_t$, **m, g** et **l** ***(équation 4)***.

3) Définir le référentiel barycentrique R^*_M lié à la barre AB. Définir les mouvements de R^*_M par rapport au référentiel absolu *R* (O, x, y, z) et de la barre AB dans R^*_M.

4) Définir le moment cinétique $\overrightarrow{\mathbf{L}^*}$ de la barre AB dans son référentiel barycentrique R^*_M (norme, direction, sens).

5) En utilisant le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique R^*_M et en vous servant de l'***équation 4*** déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ_t en fonction uniquement de $\ddot{\theta}_t, \dot{\theta}_t, \sin\theta_t, \cos\theta_t$, **g** et **l** ***(équation 5)***.

6) Exprimer d'après le théorème de Koenig, l'énergie cinétique de la barre AB dans le référentiel absolu R, à l'instant t, en fonction uniquement de $\dot{\theta}_t, \sin\theta_t$, **m** et **l** ***(équation 6)***.

7) La barre AB peut-elle être considérée comme un système conservatif ? – Justifier.

8) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique de la barre entre les instants t_0 et t (on choisira Ep = 0 en O) en fonction uniquement de $\dot{\theta}_t, \sin\theta_t, \cos\theta_t$, **g** et **l** ***(équation 7)***.

9) Soit t_f, l'instant où la chute de la barre AB s'arrête, c'est-à-dire pour lequel M touche le sol. Grâce à l'***équation 7***, déterminer la vitesse angulaire finale $\dot{\theta}_{t_f}$ ainsi que la vitesse finale du point M, notée : $V_{M_f} = \dot{y}_{M_f}$.