ISTIA EI-1	MECANIQUE DU SOLIDE	ET Session 1 – 2H *sans document, calculatrice autorisée*

Exercice 1 : Centre de masse de la molécule d'eau

Une molécule d'eau (H_2O) est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène. On assimile les noyaux de ces atomes à des points notés O, H et H'.
A quelle distance du noyau de l'atome oxygène, notée $\mathbf{d_O}$ se trouve le centre de masse G de la molécule d'eau, sachant que le triangle OHH' est isocèle (Faire un schéma) ?

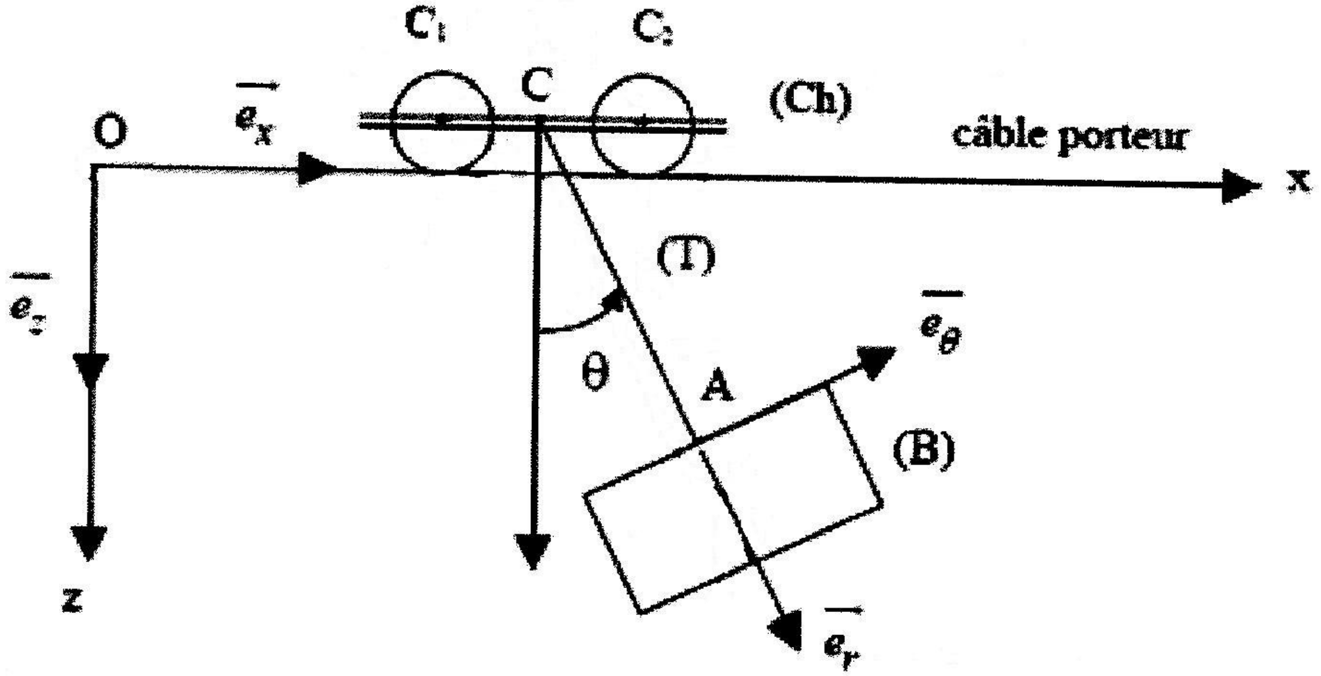
Données : Distance entre noyaux O et H : d = 0.96 10^{-10} m
Angle HÔH' = 104.5°
Masses des noyaux : m_H = 1 u.m.a m_O = 16 u.m.a (u.m.a : unité de masse atomique)

Exercice 2 :

Un **téléphérique** est constitué :

- d'un **chariot (Ch)** comportant deux roues identiques de centres C_1 et C_2, qui **roulent sans glisser** sur le câble porteur (axe x) supposé être parfaitement horizontal,
- d'un **bras (T)** articulé sur le chariot (Ch) en C, milieu des centres C_1 et C_2 des roues,
- et d'une **benne (B)** liée au point A situé à l'extrémité inférieure du bras (T).

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.



L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre *R* supposé galiléen auquel est associé un repère orthonormé $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ avec $\vec{e_z}$ dirigé vers le bas, $\vec{e_x}$ colinéaire au câble, O situé à l'extrémité gauche du câble. Dans tout le problème le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme **g = 9,81 m.s^{-2}**.

Le **chariot (Ch)** de **centre de masse C**, a pour masse m_{Ch} =200 kg On désigne par x **l'abscisse de C** dans *R*. Les centres des roues C_1 et C_2 sont séparés par la distance : d = 1m. Les roues ont une masse m_r =40 kg , un rayon r =20 cm et un moment d'inertie par rapport à leur axe de rotation : $J=\frac{1}{2}m_r r^2$. ω_i désigne la vitesse angulaire de la **roue n°i** (avec **i = 1 ou 2**).
La réaction du câble sur la **roue n°i** est désignée par $\overrightarrow{R_i}=\overrightarrow{N_i}+\overrightarrow{T_i}$ avec $\overrightarrow{T_i}=T_i\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{N_i}=N_i\overrightarrow{e_z}$. Le coefficient de frottement solide entre les roues et le câble est **μ = 0,1.**

Le **bras (T)** homogène a pour masse m_T =300 kg et de longueur L = 3m. La **benne (B)** homogène a pour masse m_B = 2000 kg.
G étant le **centre de masse** de l'**ensemble bras et benne (T+B),** on désigne par a la distance entre C et G : **a = 3,5 m.**
J_Δ est le moment d'inertie de l'**ensemble bras et benne (T+B),** par rapport à l'axe de rotation Δ passant par C. A l'instant t, on désigne par θ, l'angle entre $\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{CA}$.

1) **Questions de cours :**
   a) Rappeler le théorème du moment cinétique appliqué à un solide S en un point O fixe dans un référentiel galiléen *R*.
   b) Donner la relation qui lie le moment cinétique du solide en rotation par rapport à un axe fixe Δ du référentiel galiléen *R*, la vitesse angulaire de rotation ω et le moment d'inertie du solide J_Δ par rapport à cet axe de rotation.
   c) Rappeler le théorème du moment cinétique appliqué à un solide S en rotation par rapport à un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen *R*.

2) Le **chariot (Ch)** étant maintenu **immobile dans *R***. Un **essai d'oscillation** de l'**ensemble bras et benne** (**T + B**), est effectué.
   a) Expliciter les forces auxquelles est soumis **l'oscillateur bras et benne (T + B),** et leurs points d'application.
   b) En appliquant le théorème précédent, établir l'équation différentielle vérifiée par θ.
   c) Que devient cette équation différentielle, dans le cas des petites oscillations (initialement θ_0 petit), donner l'expression de la **pulsation propre ω_0** de l'**oscillateur bras et benne (T + B),** en fonction de m_B, m_T, g, a et de J_Δ.
   d) On mesure, dans ce cas, une période T_i = 4,6 s . En déduire les valeurs de ω_0 et de J_Δ.
   e) Sachant que le **bras (T)** a un moment d'inertie par rapport à Δ : $J_{(T)/\Delta}= 1/3\ m_T L^2$, en déduire la valeur de $J_{(B)/\Delta}$, le moment d'inertie de la **benne (B)** par rapport à Δ.

3) Le **chariot (Ch)** est mis **en mouvement** par un câble tracteur qui exerce une force de traction, notée $\vec{F}=F\overrightarrow{e_x}$ appliquée en C.
   a) Soit G', le centre de masse de l'**ensemble chariot-bras-benne [(Ch), (T+B)]**, calculer la distance de G' par rapport à C.
   b) Expliciter et représenter sur la **figure au recto,** les différentes forces appliquées à l'**ensemble chariot-bras-benne [(Ch), (T+B)].**
   c) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'**ensemble chariot-bras-benne [(Ch), (T+B)]** et projeter l'équation dans *R*.
   d) Appliquer le théorème du moment cinétique à la roue C_1 dans son référentiel barycentrique (par rapport à son axe de rotation Δ_1').
   e) Les roues **roulent sans glisser** sur le câble et en déduire une relation entre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et T_1. Quelle relation similaire obtient-on avec la roue 2 ? En déduire la relation entre T_1 et T_2.
   f) En vous servant d'un référentiel relatif bien choisi et du théorème de composition des accélérations, montrer que l'accélération du centre de masse G' de l'**ensemble chariot-bras-benne [(Ch), (T+B)]** dans le référentiel *R*, est de la forme :

$$\overrightarrow{a_{G'}}=A_1\overrightarrow{e_r}+A_2\overrightarrow{e_\theta}+\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_x}$$ dans laquelle A_1 et A_2 sont des expressions que l'on explicitera.