

Mathématiques pour la théorie du signal
Deuxième contrôle continu
Durée 1h20

*L'usage d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est interdit.
L'usage du photocopie est autorisé.*

Exercice 1. On recherche une fonction causale $t \mapsto x(t)$, vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - x(t) = -2 \sin t \quad \text{pour } t > 0$$

et les conditions initiales $x(0) = 2$ et $x'(0) = 1$.

On note $X(p)$ la transformée de Laplace de $x(t)$.

1. Écrire la relation vérifiée par $X(p)$, induite par (E).
2. Calculer $X(p)$.
3. En déduire la fonction $t \mapsto x(t)$.

Exercice 2. On considère la fonction 2-périodique $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $u(t) = 1 - t$, si $t \in]0, 2[$ et $u(0) = 0$.

1. Tracer le graphe de u .
2. Déterminer la série de Fourier de u .
3. Calculer l'énergie du signal u .
4. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 3. On considère la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(t) = |\cos t|$.

1. Tracer le graphe de u .
2. Déterminer la série de Fourier de u .

On pourra, si on le souhaite, faire usage de la formule de linéarisation :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$