UNIVERSITE D'ANGERS - ISTIA
2013-2014

V.Roubtsov

Complément Mathématiques
Examen Terminal du 24 juin 2014
durée 2h
Avec polycopiés de cours, sans les TD, sans calculatrice

1. Exercice 1 : (6 points) Equation differentielle d'ordre 2

On considère l' équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y" + y = x \sin x. \tag{1}$$

- 1.{2 points} Donner la forme générale des solutions de l'équation (2)

$$y" + y = 0; \tag{2}$$

- 2. {2 points} Déterminer les reéls a, b, c et d pour lesquels la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g = x[(ax + b)\sin(x) + (cx + d)\cos(x)]$ soit solution de l'equation (1).
- 3.{2 points} Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (1) puis la solution particulière vérifiant $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2. Exercice 2 : (8 points) Géométrie et Intégrales doubles

- 1. {1.5 point} Dessiner le parallélograme D formé par les droites

$$y = 2x - 4; \quad y = 2x - 9; \quad y = -3x + 1; \quad y = -3x - 1$$

- 2. {1.5 points} Calculer le volume de la pyramide dans $\mathbb{R}^3$ de sommet $S(1; 1; 1)$ et de base D. Rappel : vol(pyramide) $= \frac{1}{3}$.aire(base).hauteur
- 3. {1 point} Calculer le jacobien du changement de variables

$$x = \frac{1}{5}(u + v); \quad y = \frac{1}{5}(-3u + 2v); \tag{3}$$

- 4. {2 points} Est-il inversible ? Trouver son inverse et dessiner l'image de D par cet inverse.
- 5. {2 points } À l'aide du changement 3 calculer

$$I = \int\int_D x^2 dxdy;$$

3. Exercice 3 : (8 points) Analyse vectoriel

Soient $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z)$ et $\vec{Q} = \vec{Q}(x, y, z)$ deux fonctions vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

- 1.{3 points.} Déterminez l'expression générale du produit scalaire $(\vec{\nabla} \wedge \vec{P}, \vec{Q})$ en coordonnées cartésiennes.
- 2.{3 points.} Calculer $(\vec{\nabla} \wedge \vec{R}, \vec{R})$ où $\vec{R} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ et $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- 3.{2 points.} Evaluer $(\vec{\nabla}.\vec{P})$ pour $\vec{P} = x^2\vec{i} + 3xz^2\vec{j} - 2xz\vec{k}$.