Université d'Angers, ISTIA, EI1
Vendredi 3 avril 2015

Compléments d'analyse – Contrôle continu n°2

Durée : 2h30

Avec documents de *ce* cours & TD. Sans calculatrice

Exercice 1 [4 pts]

On considère l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} \text{ avec } D = \{(x,y)\,;\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x+y \leq 3\}.$$

1. (1 pt) Donnez la représentation graphique de D.
2. (3 pts) Calculez I.

Exercice 2 [5 pts]

On considère l'intégrale double

$$I = \iint_D x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}dxdy \text{ avec } D = \left\{(x,y)\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3+y^3 \leq 1\right\}.$$

1. (0.5 pt) Quel est le domaine de définition de la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t} = t^{\frac{1}{3}}$? Donnez l'allure de son graphe.
2. (1 pt) Faites le changement de variables $u = x^3$, $v = y^3$ dans I. On rappelle la relation entre jacobiens :
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}.$$
3. (3.5 pts) Terminez le calcul de I.

Exercice 3 [4 pts]

On considère une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le champ de vecteurs

$$\vec{V} : M = (x,y,z) \to \vec{V}(M) = (P,Q,R)\,, \text{ avec } \begin{cases} P = 2xz\phi(z) \\ Q = -2yz\phi(z) \\ R = (y^2-x^2)\,\phi(z). \end{cases}$$

1. (3 pts) Calculez le rotationnel de $\vec{V}(M)$.
2. (1 pt) Pour quelles fonctions ϕ le champ $\vec{V}(M)$ est-il un champ de gradients ?

T.S.V.P.

Exercice 4 [7 pts]

On considère la surface D définie par

$$D = \left\{ (x, y) \, ; \; x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \; (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

1. (1 pt) Donnez l'allure de la représentation graphique de D dans le plan x, y.
2. On considère le changement de variable elliptique :

$$g : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2, \; (r, \theta) \mapsto (x, y), \; \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 2r\sin(\theta). \end{cases}$$

   (a) (1 pt) Montrez que

$$g^{-1}(D) = \left\{ (r, \theta) \, ; \; 0 \leq r \leq 1, \; r \leq 2\cos(\theta), \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

   (b) (1 pt) Donnez l'allure de la représentation graphique de $g^{-1}(D)$ dans le plan θ, r.

3. (4 pts) Calculez l'aire de D.