Contrôle EI2 3h00

Questions rapides

1. Supposons que l'espace nul d'une matrice A (de taille 5×4) est engendré par les vecteurs u et v ci-dessous :

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Donner la forme échelonnée réduite de A.

2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Donner les 4 espaces fondamentaux de A.

   (b) Donner le rang de A.

   (c) Que pouvez vous dire des solution(s) éventuelle(s) de $Ax = b$.

   (d) Donner (sans calcul) la forme échelonnée réduite de la matrice B (de taille 6×8) $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Question de "Réflexion"

1. Dans $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de projection P d'un vecteur sur le plan d'équation

$$x + y + z = 0$$

   (*on rappelle que* $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.

2. Donner la matrice de projection P_1 d'un vecteur sur la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Donner la matrice de projection P_2 sur la droite d'équation

$$x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0$$

4. Comparer P et $P_1 + P_2$. Qu'observez-vous ? Expliquer.

Applications directes de cours

1. Donner la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

2. (a) Donner la décomposition PDP^{-1} de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Est ce que la décomposition PDP^{-1} est toujours possible ?(si non, expliquer dans quels cas elle est possible)

Problème 1

Considérons une matrice A d'espace nul : $N(A) = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice B dont l'espace colonnes $C(B)$ est identique à $N(A)$.

2. Après résolution de l'équation $Ax = b$ avec un second membre b fixé, on trouve la solution particulière : $x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Votre enseignant d'algèbre M. Lagrange vous affirme que le vecteur : $x_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de $Ax = b$; Votre second professeur M. Jolly vous dit que M. Lagrange se trompe et il vous affirme que le vecteur : $x_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution de $Ax = b$.

   (a) Est ce M. Lagrange a raison, ou est ce que M. Jolly a raison, ou les deux professeurs ont raison ou bien ils ont tort tous les deux ? Expliquer et justifier votre réponse.
   Indice 1 : Si x est une solution de $Ax = b$, alors que vérifie $x - x_p$? Indice 2 : Vous pouvez utiliser la matrice B de la question 1 !

Problème 2

Un étudiant d'ei2 a résolu l'équation : $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et il a trouvé l'ensemble des solutions $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \forall c, d$.

1. Retrouver la matrice A que l'étudiant a utilisé. Expliquer.

Problème 3

Dans cet exercice, on cherche les coefficients C et D de la courbe $y = C + D \cdot 2^t$ qui passent au mieux (au sens des moindres carrés) par les 3 points suivants $(t_1, y_1) = (0, 6)$,$(t_2, y_2) = (1, 4)$,$(t_3, y_3) = (2, 0)$.
Partie 1 :

1. Donner le système d'équations (de la forme $Ax = b$) qui doit être vérifié par C et D pour que la courbe passe par les 3 points.
2. Quelles sont la ou les conditions sur le second membre pour l'existence de solution.
3. Calculer les meilleurs coefficients (au sens des moindres carrés) $\hat{C}$ et $\hat{D}$ de courbe $y = C + D \cdot 2^t$.

Partie 2 :
Dans cette partie, on se propose de reprendre le même exercice en exploitant la décomposition QR de la matrice A ci dessus.

1. Calculer l'espace colonne de A. Donner une base orthonormée de cet espace.
2. En déduire la décomposition QR de A.
3. Retrouver les meilleurs coefficients $\hat{C}$ et $\hat{D}$ obtenus en partie 1 pour la courbe $y = C + D \cdot 2^t$.

Problème 4

Considérons la matrice carrée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} .9 & .6 \\ 0.1 & .4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. Calculer la solution $u(k)$ de l"équation aux différences $u(k+1) = Au(k)$ avec $u(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire l'expression de $u(\infty)$.
4. Considérons maintenant l'équation $u(k+1) = (A + \alpha \cdot I)u(k)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sans calcul, donner $u(\infty)$ en fonction de α. Expliquer.