UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2013-2014
ISTIA EI1
BASES de L'ANALYSE

Contrôle continu du 17/01/2014

Exercice I i) Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $e^{\sin(x)}$.

ii) En déduire la limite en 0 de

$$\frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{2x^2 + x^3}$$

Exercice II Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

i) Déterminer le domaine de définition de f.

ii) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'infini à l'ordre 3.

iii) En déduire que la droite $y = x - 1$ est une asymptote à l'infini à la courbe représentative de f. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

iii) Tracer dans un repère orthonormé l'asymptote déterminée dans iii) ainsi que la partie à l'infini de la courbe représentative de f.

Exercice III

i) Résoudre sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

ii) Calculer sur $]-\infty, 0[$ (resp. sur $]0, +\infty[$) une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - \frac{2}{x} y = x^3$$

iii) En déduire la solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$ (resp. sur $]0, +\infty[$).

iv) Calculer la solution de (E) qui passe par le point $(1, 1)$ et tracer approximativement le graphe de cette solution.

vii) On considère l'équation différentielle (e) $xy' - 2y = x^4$. Déduire de ce qui précède la solution générale de (e) sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$.

viii) Résoudre (e) sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

i) (E1) $\quad y'' + 2y' - 4y = 0.$

ii) (E2) $\quad y'' + 8y' + 16y = 0.$

iii) (E3) $\quad y'' + 2y' + 4y = 0.$