Base d'algèbre, Examen de rattrapage, Le 29 août 2014, Durée : 2h

Tous documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. [2pts] On considère la matrice $L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. [6pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice M de f. Montrer que les deux valeurs propres de la matrice M sont $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Diagonaliser la matrice M en établissant $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour une certaine matrice P inversible. Montrer que $M^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ pour tout n. En déduire que l'élément en haut à gauche de la matrice M^n est $\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$.

Exercice 3. [6pts] Déterminer si la matrice S ci-dessous est diagonalisable (on pourra calculer son polynôme caractéristique, en déduire que 1 et -2 sont des valeurs propres et chercher des bases des sous-espaces propres). Quelles sont les valeurs propres de la matrice C ci-dessous ? Est-ce qu'elle est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. [4pts] Etablir $\begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 \\ b & a-\mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b$. Calculer les déterminants suivants en développant suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{X} & 1 \\ c & b & a-\mathrm{X} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{X} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{X} & 1 \\ d & c & b & a-\mathrm{X} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathrm{X} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\mathrm{X} & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1}-\mathrm{X} \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. [2pts] Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour calculer la matrice inverse de A.