CC3, Base d'algèbre, Le 16 janvier 2014

Durée : 1h20

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1. On considère la matrice $L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide du déterminant montrer que L est inversible. Calculer L^{-1} par la méthode de la comatrice.

2. Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système $L\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel, des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice carrée. Expliquer pourquoi un sous-espace propre est un sous-espace vectoriel.

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $-(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda)$. Diagonaliser la matrice A (en classant, de préférence, les valeurs propres dans l'ordre croissant). Calculer $6A^n$ pour n un entier quelconque.

3. Soit $\vec{\mathbf{u}}_0$ un vecteur quelconque en dimension 3. On définit une suite $\vec{\mathbf{u}}_n$ de vecteurs par la relation $\vec{\mathbf{u}}_n = A\vec{\mathbf{u}}_{n-1}$. Donner une relation entre $\vec{\mathbf{u}}_n$ et $\vec{\mathbf{u}}_0$. Calculer $\vec{\mathbf{u}}_n$. Lorsque $\vec{\mathbf{u}}_0 = -\vec{\mathbf{e}}_1$ (où $\vec{\mathbf{e}}_1$ est le premier vecteur de la base canonique), que vaut $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$ puis $\vec{\mathbf{u}}_n$?

Exercice 3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer si B est diagonalisable et justier vos arguments. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour calculer B^{-1}.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui est la rotation d'angle $\pi/2$.

1. Déterminer la matrice M de f en calculant $f(\vec{\mathbf{e}}_1)$ et $f(\vec{\mathbf{e}}_2)$. Montrer que M satisfait la relation $M^{-1} = {}^tM$.

2. Expliquer *géométriquement* pourquoi M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}^2$.

(question bonus) Montrer que M est diagonalisable si l'on accepte des valeurs/vecteurs propres complexes.

3. Traiter le même exercice avec une matrice de rotation d'angle θ quelconque.