UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2015-2016
ISTIA EI1 et EI2PM
BASES de L'ANALYSE

Contrôle Continu du 18/01/2016

Documents de cours et TD autorisés, calculatrices interdites. Une feuille A4 R/V de notes personnelles autorisée.

Exercice I i) Démontrer que $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.

ii) A l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. En déduire l'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice II On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1-x^2}{x+2}dt$$

i) Moyennant une division euclidienne, démontrer que $1 - x^2 = (-x+2)(x+2) - 3$. Ecrire $\frac{1-x^2}{x+2}$ sous la forme $Ax + B + \frac{C}{x+2}$.

ii) Calculer I.

EXERCICE III i) Démontrer que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$. En déduire une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.

ii) On considère l'intégrlae définie suivante : $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$. Calculer I à l'aide d'une intégration par parties. Indication: on pose $u(x) = \ln(1+x), v'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Exercice IV i) Calculer, en utilisant le changement de variable $x = 1 - t$, une primitive de la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.

ii) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}$. (*Indication.* Utiliser le changement de variables $t = \frac{1}{x}$ et i).

Exercice V Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int \ln(x)^n dx$.

i) Démontrer, utilisant une intégration par parties, que $I_n = x\ln(x)^n - nI_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (on pose $u(x) = \ln(x)^n, v'(x) = 1$).

ii) Calculer I_0, I_1