UNIVERSITÉ D'ANGERS
ANNÉE 2014-2015
ISTIA EI1 et EI2PM
BASES de L'ANALYSE

Contrôle continu du 16/01/2015

Exercice I i) Soit $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un polynôme de degré n admettant au moins m racines réelles distinctes $x_1, \ldots, x_m$ (donc $m \leq n$). Démontrer que $P'(x)$ admet au moins $m-1$ racines réelles distinctes.

ii) Soit $P(x) = x^n + ax + b$. Démontrer que $P''(x)$ possède une seule racine réelle, et déduire de i) que P possède au plus trois racines réelles.

Exercice II Déterminer $a, b \in \mathbf{R}$ de manière à ce que la fontion f définie sur $[0, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$

soit dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice III i) Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(2x + \sin^2(x))$. Déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.

ii) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \ln(\cos(x) + \sin(x))$.

iii) En déduire la limite en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{g(x)}$.

Exercice IV i) Calculer une primitive de $\dfrac{\sqrt{u}}{u+1}$. (Indication: poser $u = t^2$).

ii) En déduire

$$I = \int_1^{\ln(4)} \sqrt{e^x - 1}dx$$

Exercice V Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int x^n e^x dx$.

i) Démontrer, utilisant une intégration par parties, que $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

ii) Calculer I_0 puis déduire, utilisant une récurrence sur $n \geq 0$, que $I_n = P_n(x)e^x + c$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

iii) Calculer I_3.